資優教育季刊　民 83 年 6 月　第 51 期　第 23-28 頁

高中數理資優班專題研究課程設計及教學方式探討

林礽堂

壹、前言

高中數理資優班安排專題研究課的初衷，是避免數理資優班成爲「超級升學班」，期冀具有資賦優異潛能的學生，能發展出資賦優異行爲。今日的社會價值觀，多偏向考試成績的爭取，而未能注意到考試成績背後，所代表的評量學習成就的實質意義。專題研究實施過程中學生長期鑽研問題的磨練，正可避免學生受到現今社會上速食文化及急功近利主義的不良影響。

貳、分組教學

建國高中從八十一學年度，開始安排數理資優班的「專題研究」課程，所以本文中的班級事實上是建中第一屆設有「專題研究」課程的資優班。從八十一學年度到八十二學年度第一學期，我們上課情形如下：

㈠時間：每週四下午，一點到四點。

㈡地點：平常在原班級教室、資源教室和實驗室，必要時安排校外教學。

㈢分組：高一第一學期分數學、物理、地球科學三組實施，第二學期分數學、化學、生物三組實施。高二全年分數學、物理、化學三組實施。

㈣學生選組：由學生自由選組；高一每學期開始選定組別，高二則在學年之初選定。

分組後，每組的人數差不多各佔全班的三分之一，高一時每組約十六人，高二時約十四人；以實施「專題研究」課程來說，人數遠超過教師所能負荷，教學負擔過重，以致往往無法充份與每位學生討論其研究專題。又因人各相異，其瓶頸亦各自不同，難免造成學生困惑以及面臨獨自與舊經驗觀念「奮戰」而難得癥結之情形。於是易有部份學生對此課程產生不認同而未能視之爲資優生的第一主科。不過，教師們仍竭盡所能地克服一切困難，提高學習成效。

參、閱讀能力與自我學習能力的培養

筆者擔任數學組專題研究課，以下就數學組的上課方式提出報告。高一第一學期，全組指定使用鮑瓏等三人主編、九章出版社出版的「立體幾何」作爲課程藍本，主旨在於培養學生自我閱讀及學習的能力。上課時，先把學生再細分成八小組，每小組二或三人，將「立體幾何」全書分成十一個單元，規定每一小組認講一～二單元。從開學第四週開始，每週一小組上台分享心得、討論習題，並接受同學的發問與質疑，最後老師再作結論。這種訓練，可培養學生們的閱讀能力、口語表達能力、臨場應變能力，並促進自我學習的能力；在團體方面則可培養團隊學習（group study）和小組合作（team work）的能力。學期間，偶而還會補充一些問題供學生思考；學期末，舉行紙筆測驗，採取每小組交一份答案券，考試進行方式，建議第一、二小時每位同學獨立作答，第三小時共同討論，擬定整組的答案。評量時，同組同學得分相同。在這期間，團體討論問題時，由混亂未知至整理脈絡，掌握關鍵，一直到淸楚了解，這種過程最能激發學生之興趣，然而其費時亦多。期末考時這種小組效果最爲顯著，兩三人合力解題的過程中，學生往往能察覺自己遺漏的某些重點，同時思維力也較能發揮，而收互補互助之效。

因爲這是學生進入高中的第一學期，在學習方法上，對他們來說，是一個嶄新的嘗試。

另一方面，由於我們國內國中課程中，完全沒有立體幾何的內容，所以沒有辦法實施學習前的預備測驗（prior assessment），自然就無法藉此分析這種上課方式的學習成效。不過，從上課期間同學們發問與質疑的頻率，以及討論的熱烈情形，也能略見端倪。多數小組成員都覺得經由此種訓練，思考和閱讀能力的確大有進步；少數成員無法適應這種學習方法，所獲不多，其關鍵在於平時課程吸收已需一定精力，加上許多課外活動、報告等，導致一些人不能視專題研究爲最重要的科目，課前預習欠佳，上課無法跟上同學之解說，因此產生挫折感。而指導說明者因不習於掌握上課型態及氣氛，也難免會造成冷場，台下同學便忍不住打瞌睡了。

會採取這一種上課方式的最主要目的，是希望學生們能在升上高二時，練就獨立研究的初步能力——包括如何尋找自己所需要的資料，加以消化吸收，轉化成他日可用的知識。

高一第二學期，全組指定使用 Herstein 編寫的《Abstract Algebra, 2nd Ed.》作爲課程藍本。由於坊間所能找到的中文版數學參考資料十分有限，亟需培養學生閱讀英文書籍的能力，所以選擇這本原文書。這又是學生再次面對新的挑戰，最主要的困難，初爲英文單字阻礙閱讀速度，而後抽象概念令人難以領悟，因此從書本中所獲取的知識實在不多，但還是吸收了些許內容，也打開了學生的眼界，如逐步尋求證明的方法、從生活中找數學實例等。下文學生專題研究報告中，即可看出學生整理知識、解決疑難的能力；這在原文書籍中爲平常技巧，反觀國內的課本及參考書又哪能讓學生接觸此類觀念？順帶一提，高二時化學組也是採用原文書籍爲教材，國內科學參考書籍的欠缺可見一斑。

這一學期的評量使用繳交作業、口試、上台演練三種方式，誠如前述，很難客觀地評定學習成效。經與同學們交換意見後，師生均認爲有使用原文書的必要，但實施前的準備工作須很充分，學習才能有顯著效果。原文書在進一步的進修中，誠屬必要，然而無法要求所有學生均有不差的英文基礎。學生在學習期間遭受之挫折感極爲重大，經常一週的進度沒有幾頁，此時毅力反而成爲訓練之主題了。且英文語法和中文不同，若無老師的重點提示，則不易突破瓶頸。如此英文學習加抽象概念，則查字典和思考時間遠超過閱讀時間，進度是故無法強求。亦顯見通曉英文之必要。

肆、如何進行獨立研究

高二第一學期，數學組有十五位同學，每人獨立做專題研究，不再是小組合作的情形，但進行研究時仍可與同學討論。學期初提供六十餘本數學研究報告、雜誌、專題探討等資料給同學們，盼望他們能從中找到自己的研究主題。這學期學生呈現出的最大困難是自己找到研究主題，經過與學生的交談，其主要原因有下列六項：

(1)學生一向習慣於解他人所給定的問題。

(2)縱然可由書本中發現問題，但無從前評估自己能力是否足以勝任

(3)平日教科書外的數學知識貧乏，且鮮少深入思考，遇到問題也不知它是個值得探討問題

(4)雖有想研究的題目，卻無法蒐集到參考文獻（註：幾乎所有參考文獻都是英文書，我們也提供不了），不能全盤掌握問題關鍵所在，致使不得不打退堂鼓。因此，有些同學甚至過了半個學期仍未找到研究主題，老師只得一再鼓勵其繼續努力，堅持不由老師指定題目。

(5)有些學生對提供的資料，能讀懂讀通已是不易，又如何找尋題目問題？且越想找問題，越覺所學淺薄，氣餒之心油然而生。

(6)因需個別討論，老師不常在教室，同學易生玩心，對研究無法熱衷持久。

數學組的專題研究有兩位同學例外，他們分別研究「神經網路」（屬於資訊科學）與「花粉管的生長」（屬於生物類植物組）。其中前者獲得第四十五屆美國國際科學展覽（International Science and Engineering Fair）二等

獎；後者則獲得參加一九九四年九月澳洲國際科學展覽資格。其餘十三件專題研究只有三件達到應有水準，另十件皆未符合研究精神的要求。

為何大多數學生專題研究課表現不佳？依個人分析，對專題研究課的認知程度缺乏共識，整個大環境又是升學主義，只看文憑而不看解決實際問題能力的社會；此種情況下建立的價值觀念，短時間內想要重建，對某些學生實在是要求得太急切。同時，資優班的學生並非個個果眞具備資賦優異的潛能，如何要求他們發揮這方面的特質行為呢？此非專題研究之罪，誠制度之過也。

伍、學生獨立研究舉例

以高二20班數學組某位同學的報告為例，詳述於後。

一、研究時間：

開始日期：Oct. 14, 1993

完成日期：Jan. 6, 1994

二、研究主題：

若有 a 種兩兩相異之物，以固定的順序排成一串，再將 b 串此種組合物排成一整列。今規定每次只可將任意相鄰兩物的位置互相調換，那麼要如何調換，才能在最少的交換次數下，將同種的物體都各自集合在一起？（其中 a,b 均為不小於 2 的自然數）

例如：當 a＝3，b＝2 時，如何將△◯×△◯×在最少的交換次數之下，改變為△△◯◯××（或◯◯△△××，…等）的排列順序。即如何最快地將同類物都集合在一起。

另外，當 a、b 的值變化時，在每一種情況下所需的最少移動次數 n（a,b）彼此之間有怎樣的關係，也是我探討的目標之一。

三、研究過程：

◎ 82 年 10 月 14 日

在這之前，大概已有一兩個星期的時間，為了找尋適合的題目，看了好些數學雜誌。但都沒有找到感興趣的主題。今天突然靈機一動，自己想出了這個題目，而且好像蠻有趣的。於是就決定選它作為我研究的主題。

剛想出這個題目，對於如何解決它，我自己也感到茫無頭緒。於是就想到了學校最近剛落成的新圖書館。既然自己目前想不出方法來，何不參考前人的經驗呢？

在圖書館忙了一個下午，在相關資料方面遍尋無獲。或許是自己對題目的了解還不深入，以致沒有正確的找資料的方向；也可能是學校圖書館在數學方面的專門書籍並不多，使我找不到相關資料。

◎ 82 年 10 月 15 日～10 月 19 日

幾天忙著準備段考，並無進展。

◎ 82 年 10 月 20 日～10 月 28 日

這麼長的一段時間裡，我都在考慮自己的題目和數學的哪一個主題較有關，如此可以方便自己尋找資料。但是一直找不到相關主題。

◎ 82 年 10 月 21 日

今天有專題研究課。上課時，我想：既然找不到資料，那就自己先嘗試看看，能不能做出一些結果。

顯然這是不可能的。因為不論（a,b），會無法達成題目「將同類物體各自集合起來」的要求。

顯然這是不可能的。因為不論（a,b）的組合再怎麼複雜，或者 a、b 的數字再怎麼龐大，如果我們用最笨的方法：每次找出一種圖形將 b 個此種圖形皆一個個移到整列的最左邊，雖然需要較多的移動次數，但最後我們一定可以達成「將同類物各自集合」的要求。而在許多種搬動圖形的方法中，又一定有一種是需要搬動次數最少的。如此我得到了〔引理1〕：

〔引理 1〕：對任何（a,b）的組合（其中 a,b 均為不小於 2 的自然數）

恆存在 n（a,b）∈N，為達成「將同類物各自集合」的最少移動次數。

下一步我想要思考的是：如何搬移才能用最少的次數達成題目的要求。經過反覆的思考和一些實驗之後，我發現了此一原則：

若要用最少的移動次數完成，則完成後的圖形排列順序和原先各串中圖形的排列順序相

同。……〔假設1〕

例如，△◯×△◯×△◯×重組成△△△◯◯◯×××會比重組成其他形式快。而□×◯△□×◯△□×◯△重組成□□□×××◯◯◯△△△需要最少的移動次數。

目前，我還沒想到恰當的方法來證明此一原則，所以它只能算是一個假設。我認爲它成立的理由可能是：如果依此方法移動圖形，在最左、右端的兩個圖形就不用移動，所以需要的次數一定較少。

雖然如此，但是如果我不能用數學方法證明，假設就永遠只是假設。尋找〔假設1〕的證明法當是我下一個努力目標。

◎ 82年10月21日～11月4日

這一段時間主要在思考〔假設1〕的證明方法，但並沒有得到什麼實際的結果。

◎ 82年11月4日

多日來的思考，雖然未能找到〔假設1〕的適當證明方法，但在反覆的實驗之下，卻使我更加肯定〔假設1〕應是正確的。

爲了節省時間，現在我暫時把〔假設1〕的證明放在一旁，姑且肯定是正確的，繼續進行下面的研究步驟。

第一步我先考慮 $a=2$ 的情形：

$a=2$ 就表示兩種圖形，例如◯和×以◯×的形式重覆出現b串：◯×◯×……◯×。

在這種情形下欲以最少移動次數完成重組的原則很簡單，只有以下兩個：

1.◯必須移至左側，而×必須移至右側。（根據〔假設1〕）

2.在任何一次移動中，都不可以把◯或×向目標的反方向移動。

由於圖形只有兩種，所以只要稍加注意，應該很容易做到上面兩個原則才對。在 $a=2$ 的情形下，我對各種不同的 b 值做了幾次實驗，結果如表一。

表一

n（a,b）a \ b	1	2	3	4	5	……
2	0	1	3	6	10	……

根據表一可以發現，當 $a=2$ 時，n（a, b）的值似乎是以階差數列的方式增加的。我們稱此數列爲〈$A2_b$〉，則 $A2_1=0$, $A2_2=1$, $A2_3=3$,……

〔引理2〕：當 $a=2$, $b=1,2,3,\cdots\cdots,n,\cdots\cdots$ 時，我們把 n（a,b）形成的數列稱爲〈$A2_b$〉,〈$A2_b$〉爲一階差數列，其一般項 $A2_b=b(b-1)/2$，相鄰兩項差 $A2_b+1-A2_b=b$

證明：◯×◯×……共b串相連。依上述的兩個原則，移動方式應爲：從最左邊開始，每遇到一個◯就將它向左移，直到它的左邊沒有×爲止。如此一來，第一個◯不動，第二個◯跨過一個×（動一次），第三個◯連續跨過兩個×（動兩次），……，第b個◯動了(b-1)次。故總移動次數：$1+2+\cdots\cdots+(b-1)=b(b-1)/2$ 次。

故得證 $A2_b=b(b-1)/2$。如在此b串◯×後面再加一串◯×，則最後一個◯將跨過除了最後一個×之外的其他b個×，除此之外移動情形皆不變。

故總移動次數正好增加b次，得證：$A2_{b+1}-A2_b=b$

做出 $a=2$ 的結果之後，我對解決此一問題增加了不少自信。

我也猜想，$a=3,4,\cdots\cdots$ 的情形會不會也是階差數列呢？這就是我下一個努力的目標。

◎ 82年11月5日～12月6日

科展、段考、校慶。三件大事接踵而至，忙得不亦樂乎。使我幾乎忘了專題研究的存在。毫無進度可言。偶而思考〔假設1〕的證明，但並無所獲。

◎ 82年12月8日～12月13日

忙著趕物理報告，無進展。其中12月10日爲了查物理資料至市立圖書館總館。本想一併尋找數學資料，但因時間不足而作罷。

◎ 82年12月15日～12月16日

隔了一個多月，終於又回到了專研上面。

繼續考慮 $a=3$ 的情形：

$a=3$ 表示3種圖形，例如：◯，×和△

，以◯×△的順序重覆出現b串。

◯×△◯×△……◯×△經過實驗，欲以最少次數完成重組的原則如下：

1.◯必須移至左側，△必須移至右側，而×最後應在中間。（根據〔假設1〕）

2.移動過程中，◯不可向右移，△不可向左移，而×在向左移時不可跨過◯，向右移時不可跨過△。

這些原則看起來有些複雜了，在移動時一不小心就會發生錯誤。於是我考慮是否有更簡單，又不容易錯的方法。後來我想到：如果我們先將全部的◯移至左側，那剩下的部分〝×△×△×△……〞不就相當於 $a = 2$ 的情形了嗎！這樣，我們就可以利用舊經驗來處理新事物，顯得容易多了！

同樣的，在 $a = 3$ 的情形下，我也對不同的b值做了實驗，結果如表二。

表二

a n（a,b） b	1	2	3	4	5	……
3	0	3	9	18	30	……

根據表二可以發現，$a = 3$ 時，n（a,b）的數似乎又是以一階階差數列的方式增加的。我們稱此數列爲〈$A3_b$〉，則 $A3_1 = 0$, $A3_2 = 3$, $A3_3 = 9$,……

〔引理3〕：當 $a = 3$, $b = 1,2,\cdots\cdots,n,\cdots$ 時，我們把n(3,b)形成的數列稱爲〈$A3_b$〉，〈$A3_b$〉爲一階差數列，其一般項 $A3_b = 3b(b-1)/2$，相鄰兩項項差 $A3_b + 1 - A3_b = 3b$

證明：方法和〔引理2〕的證明極類似。故在此僅作略述。◯×△◯×△…共b串相連。用〔引理2〕證明中所述的移動法，將所有的◯先移至左邊。如此移動共需 $2 + 4 + \cdots\cdots 2(b\text{-}1) = 2(b = 1\text{-}1)/2$ 次，排列剩下的〝×△×△……〞需移動 $b(b\text{-}1)/2$ 次（由〔引理2〕知）。故共移動 $3b(b\text{-}1)/2$，得證 $A3_b = 3b(b\text{-}1)/2$。在b串「◯×△」後再加一串「◯×△」，則將最後一個◯移至左側需2b步。處理剩下的「×△×△…」時，比本來多了 $A2_{b+1} - A2_b$ 步，也就是b步。一共多了 $2b + b = 3b$ 步，故得證 $A3_{b+1} - A3_b = 3b$

今天最重要的收穫是想到利用舊經驗處理新事物。如此一來，就可以〔引理2〕、〔引理3〕爲基礎，推出 $a = 4,5,\cdots,n,\cdots$ 的情形了。這就是我的下一個主要目標。

◎82年12月23日～12月30日

表三

		〈$B1_a$〉	〈$B2_a$〉	〈$B3_a$〉	〈$B4_a$〉	〈$B5_a$〉			Aa_{b+1}
	b n(a,b) a	1	2	3	4	5	…	b	$-Aa_b$
〈$A1_b$〉	1	0	0	0	0	0	…	0	0
〈$A2_b$〉	2	0	1	3	6	10	…	$\frac{b(b-1)}{2}$	b
〈$A3_b$〉	3	0	3	9	18	30	…	$\frac{3b(b-1)}{2}$	3b
〈$A4_b$〉	4	0	6	18	36	60	…	$\frac{6b(b-1)}{2}$	6b
〈$A5_b$〉	5	0	10	30	60	100	…	$\frac{10b(b-1)}{2}$	10b
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
	a	0	$\frac{a(a-1)}{2}$	$\frac{3a(a-1)}{2}$	$\frac{6a(a-1)}{2}$	$\frac{101(a-1)}{2}$	…	n(a,b)	
	$B\,b_{a+1}$ $-B\,b_a$	0	a	3a	6a	10a	…		

運用上次想到的利用舊經驗的方法，我們可以很容易推出如表三所列的內容：

根據表三不難發現，表中的 n (a,b) 的數字似乎是以 a = b 這條直線爲對稱軸，存在軸對稱的關係。

◎ 83 年 1 月 6 日

終於，進入了整個研究中最重要，也是最後的一個步驟：找出 n (a,b) 的一般項表示法。

首先我們由表三查出，在固定 a 值的每一列中，代入不同的 b 值，所得到的數列爲 $\langle A1_b \rangle$，$\langle A2_b \rangle$，$\langle A3_b \rangle$ ，……其一般項分別爲 0〔即 0 b (b-1) ／ 2〕，b (b-1) ／ 2, 3b (b-1) ／ 2 ，……。可以發現這些數列的一般項皆爲 K • b (b-1) ／ 2 的形式（其中 k ∈N 或 k = 0），若我們能找出每一列固定的 a 值和 k 的關係，我們就可以求得 n (a,b) 的一般項表示法。

於是我列出了表四。

表四

a	1	2	3	4	5	……
k	0	1	3	6	10	……

在表四中我們發現 k 的值爲一階差數列，首項爲 0，各項差 Ka + 1-Ka = a ，故 Ka 的一般項爲 a (a-1) ／ 2 。將此 k 值代入 n (a,b) = k • b (b-1) ／ 2 式中，即可得到以下的式子。

〔引理 4〕： n (a,b) = ab (a-1) (b-1) ／ 4

由於上式爲 a,b 的對稱式，故可知 n (a,b) = n (b,a) 必成立。即〔引理 5〕：

〔引理 5〕 :n (a,b) = n (b,a)

四、結論：

將◯×△◯×△……（a 種圖形，重覆 b 串），重新排列，使同種圖形彼此相鄰的各種方法中，以排成◯◯◯…×××…△△△……（和原來圖形順序相同）最快。且所需最少移動次數：n (a,b) = ab (a-1) (b-1) ／ 4 ，而且 n (a,b) = n (b,a)

陸、檢討與建議

由於受到升學管道缺乏彈性的影響，數理資優班的學生無法將專題研究課程，視爲資優班最主要的科目。在升學管道未得到適當的調整之前，增加專題研究課的上課時數，才能使學生眞正重視專題研究課，進而得以發揮他們的資優特質行爲。

此外，學生在進行專題研究時，時有找尋參考資料的需要，並因此感到國內各種學術資訊的不足。國外的許多高中生都可以利用國際學術網路（如 Internet ）取得各種研究所需的參考資料、以及與熟悉該研究領域的他人進行討論。國內的「臺灣學術網路」目前尚未開放一般高中生使用，若能在網路骨幹與高中校園間建立連線，適當開放給有需要的同學使用，相信必能打開同學的眼界、接觸許多最新資料，對專題研究的進行也會有顯著的輔助功能。

由於國內翻譯資訊的數量不足、出版時間往往落後國外甚多，我們漸漸發現英文能力在獲取新知時的重要。高中標準教材中所教授的英文並不足以應付研讀科技期刊或論文的需要，因此如何加強學生的英文能力，加速學生對原文出版品的吸收，便成爲專題研究課程中，先期技能訓練的一大課程問題。

(本文作者爲台北市建國中學資優班教師)