

應用後設認知教學策略 教導國中學習障礙學生

解二元一次方程式應用題之教學分享

何美嫻

台北市立新民國中資源班教師

壹、前言

數學為科學、技術及思想發展之基石（張世慧，2006），近年來，中外各國的數學教育皆著重在解題能力的培養（江美娟，2002）。美國數學督學協會（National Council of Supervisors of Mathematics; NCSM）將「問題解決」列為十大數學基本能力範圍中的第一項（NCSM, 1977），並認為今後 21 世紀教育活動的重點在於「問題解決教學活動」（NCSM, 1989）；美國數學教師協會（The National Council of Teachers of Mathematics; NCTM）也認為學生學習數學的目標應包含成為問題解決者（NCTM, 1995）。在我國九年一貫數學課程綱要中亦提及除了要培養學生獨立思考的能力之外，同時也強調應訓練學生解決問題的能力；並且隨著民國 103 年 12 年國教的全面實施，培養學生面對未來的關鍵能力（如：問題解決能力）將愈發重要。傳統上，應用問題是培養抽象能力及解決問題的好方法，而在學生進入國中後，應用問題將

運用代數的方法來解答（教育部，2008）。

依據教育部九年一貫部編本教科書單元編序，我國學生自 7 年級第一冊第三章即開始接觸代數，學習一元一次方程式，是具體操作導向至抽象概念的根基，至 7 年級第二冊第一章又加入了另一「元」之抽象概念，學生須學習二元一次方程式，並將之運用在應用題解題上。筆者在國中資源班教授學習障礙學生（以下簡稱學障生）一元一次方程式之初，即感受到巨大的挫折，受限於學障生的後設認知能力不足，在解題時，常不知道該假設何者為未知數或是無法將文字敘述轉化為數學符號進行運算。之後經由網路搜尋相關教學資訊，發現許多在特教園地耕耘的前輩們分享運用後設認知教學策略能有助於提升學障生的解題能力，故筆者在第二學期乃使用改編自 Montague（1992，1995，1997）的「認知—後設認知策略」教授更抽象的二元一次方程式，並經由學生的實際課堂反應加以修正調整模

◎通訊作者：何美嫻 c19870410@hotmail.com



式，期望能提供給與筆者遇到相同挑戰的讀者們作經驗的交流與分享。

貳、後設認知策略應用於二元一次方程式教學設計

後設認知 (metacognition) 一詞係由 Flavell (1976) 所提出，它是由 meta 和 cognition 兩個字組合而成的，meta 源自於希臘文，其原意是指以超然或旁觀的立場來看事物，而對事物有更具普遍性與更成熟的理解 (邱上真，1989)，亦即認知的認知，綜合各家學者的看法 (Brown, 1987; Flavell, 1987; Paris, 1983)，後設認知係指個體能對整個認知活動的歷程與結果有自我覺知，並能針對目標進行自我評估、自我監控與自我調整的能力。而在數學解題歷程，波蘭數學家 Polya (1945) 是最早提出解題歷程模式的學者，其將解題歷程分為四個階段，分別為瞭解問題、擬定計畫、執行計畫及回顧解答，並指出每個人於解題時皆可能會經歷此四個階段，但並非依直線進行。

要如何結合後設認知策略與數學解題歷程，筆者在教學設計之初，先搜尋相關文獻，發現 Montague (1992, 1995, 1997) 的「認知—後設認知策略」將數學解題歷程詳細步驟化，並且逐步融入自我教導、自我提問及自我監控等後設認知策略，國內許多研究者 (江美娟，2002; 洪意琇，2008; 孫扶志，1995; 陳曉萍，2005; 許雅媚，2007) 亦採用

此模式於教導學障生解數學應用問題。故筆者乃依教學需要改編 Montague (1992, 1995, 1997) 的「認知—後設認知策略」教導學障生學習二元一次方程式應用題單元。教學設計包含後設認知教學步驟及正式教學活動，茲分述如下。

一、後設認知教學步驟

Montague (1992, 1995, 1997) 的「認知—後設認知策略」將解題歷程分為「閱讀」、「釋義」、「轉換」、「計畫」、「預測」、「計算」及「檢查」等七個步驟，並將自我教導、自我提問及自我監控融入每個步驟之中。筆者依學生上課反應，將解題歷程簡化為六個步驟並設計成口訣，分別為「讀」、「說」、「畫」、「想」、「算」及「看」，如圖 1。首先學生在解題時要先閱讀題目，之後要了解題目在說些什麼，接著要將題目訊息畫出來，想出解題方式並加以計算，最後要將計算過程及答案檢查驗證，最重要的是在每個步驟中皆包含「自我教導」、「自我提問」及「自我監控」等後設認知策略。如在步驟一「讀」時，學生要先告訴自己要閱讀題目，如果不懂題目在說些什麼，要再重頭看一次題目 (自我教導)；接著要問自己是否已經了解題目內容 (自我提問)；最後要監控自己在解題時，是否掌握應答的線索 (自我監控)。其餘詳細內容請見表 1。

二、正式教學活動



筆者在進行教學活動時會先示範，帶領學生熟練運用「讀」、「說」、「畫」、「想」、「算」、「看」等六字口訣，並搭配以表 1 內容製成的提示卡，步驟化逐步解題。首先教師以課本例題作範例，自己邊唸口訣，邊把自我教導、自我提問及自我監控的內容說出來(如圖 2)，每示範一步驟，即帶領學生練習，並鼓勵學生放聲思考，教師巡視其中，可以了解學生在解題時所遇到的盲點，從中加以指導。待學生都精熟此策略技巧後，便可要求學生逐步將放聲思考以內隱語言的方式加以進行。

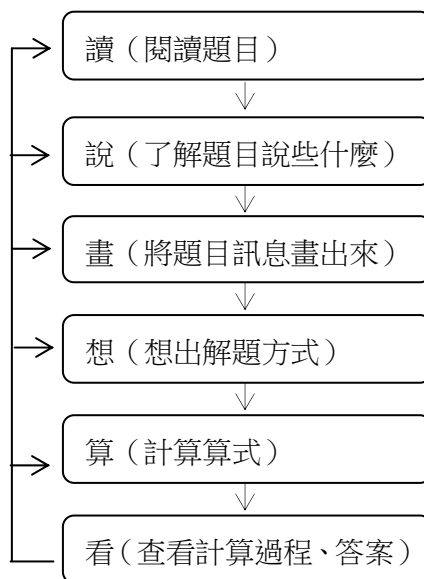


圖 1. 後設認知解題歷程

表 1. 後設認知教學步驟

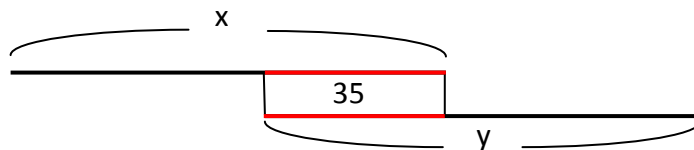
內容 解題步驟	後設認知策略		
	自我教導	自我提問	自我監控
一讀 閱讀題目	閱讀題目，如果我不懂，要再讀一次。	我懂得題目在說些什麼了嗎？	當我在解題時，我要掌握題目的線索。
二說 了解題目在說什麼	我要了解題目在說什麼。圈出重要的，劃掉不重要的。	我已經圈出重要的，並把不重要的資訊劃掉了嗎？	剩下的資訊是解題時要用到的。
三畫 將題目訊息畫出來	我要將題目畫成圖。	這個圖符合題目所說的嗎？	這個圖是否有不對的地方。
四想 想出解題方式	我要擬定計畫並決定使用什麼解題方法。	我已經擬定了解題計畫並決定使用什麼方法了嗎？	這個計畫是不是對的。
五算 計算算式	我要依數學運算規則進行計算。	我是不是有依照先乘除後加減，括弧內數字先做？	算式皆有依步驟完成。
六看 查看計算過程答案	檢查計算過程與答案是否有符合題目所問的。	我是否已經檢查了計算過程？我的答案是正確的嗎？	所有的步驟是否都正確，如果沒有，找出哪部分出了問題加以修正。



首先，我要「讀」問題來了解問題在問什麼。我會對我自己說閱讀問題。我要開始讀題了。題目：「120 位學生到遊樂園玩，每位學生至少搭過一次空中飛車或海盜船，同時搭過空中飛車和海盜船的有 35 人，已知搭空中飛車的人數比搭海盜船的人數多 15 人，問搭空中飛車的有幾人？搭海盜船的有幾人？」如果我不知道題目在說什麼，我要再閱讀一次。如果我不需要再讀題，我會在解題時記得檢查我是否已了解問題。

接下來，我要了解題目在說什麼，我要「說」出題目在問什麼。題目是問搭「空中飛車」和搭「海盜船」的人數，我要圈出「120 位學生」、「同時搭過空中飛車和海盜船的有 35 人」、「搭空中飛車的人數比搭海盜船的人數多 15 人」。圈完後，我要問自己是否已經將重點圈出來了？並確認自己已經將重點圈出來了。

現在我要「畫」出題目訊息，我會對我自己說將題目畫成圖。首先我會畫出一條線代表搭空中飛車的 x 人，再畫出一條線代表搭海盜船的 y 人，中間重疊的部分代表兩樣都有搭的 35 人。好，我要問我自己這個圖符合題目所說的嗎？檢查這個圖是否有不對的地方。



接著我要「想」出解題方式，擬定計畫及決定如何使用什麼解題方法。好，我會對自己說要列出二元一次方程式，看看我畫的圖，我知道坐空中飛車的人加坐海盜船的人中間有重疊 35 人，所以 $x+y-35=120$ ，又坐空中飛車的人較坐海盜船的人多 15 人，所以 $x-y=15$ 。我都清楚了，並且把式子都列好了，接下來我要檢查這個計畫是否符合題目所問的，如果不對，我會再行修改。

現在我要計「算」算式。我會對我自己說移項法則過一個橋（等號）要變號，所以 $x+y=120+35$ ，接著第一個式子減第二個式子，得 $2y=120$ ，過一個橋（等號）要變號，所以 $y=120 \div 2$ ， $y=60$ ，代回第二個式子 $x=75$ 。我會問我自己移項法則是否有記得變號，計算是否正確，若是正確，現在我要檢查是否完成了計算。

設坐空中飛車 x 人，坐海盜船 y 人。

$$\text{得} \begin{cases} x+y=155 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ x-y=15 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

好，最後我要查「看」計算過程與答案是否有符合題目所問的。我會對我自己說要檢查每一個過程是否有錯誤，讓我看看，我的答案是對的嗎？恩，坐空中飛車的人有 75 人，坐海盜船的人有 60 人，兩個相加減去重疊的 35 人，是不是有符合全班 120 人，有，我已完成這個問題了！若是沒有，要回去每個階段查看是否有所錯誤並要修正。

圖 2. 教學示範說明

資料來源：修改自洪意琇（2008，頁 48）



參、實際教學經驗分享

一、個案學習特徵描述

個案性情乖順，對於課業學習總是孜孜不倦，但是整體學習成就仍表現低落。在數學科目方面，具備基礎四則運算能力，但是對於掌握文意內容有困難，因此無法依循題意正確作答。

在個案國小 2 年級時，曾被鑑定為智能障礙學生並接受資源班服務，在國小升國中跨階段轉銜時，被重新提報鑑定為學障生，整體認知能力中下，於第四版魏氏智力測驗全量表得分僅為 74，雖然處於臨界範圍，但個案在各分量表間皆有顯著差異，加上在社會適應量表中，各領域 PR 值均大於 3，識字量表測驗皆過切截點，故排除受智能不足之影響及因識字所造成之閱讀困難。

二、教學設計

表 2. 個案施測答對百分率

節次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答對百分率	20	25	25	25	50	75	75	100	100	100	95	100

(一) 教學介入前

個案於解題之初，顯得自信滿滿，但是在過程中，逐漸地感到焦躁不安，眼神不斷尋求教師的協助。個案能閱讀題目，並說出題目主要的提問內容，但是無法將訊息圖像化，並據此列式，因而造成計算的困難，並且在解題完成後，不會再次檢視答案，因此在第一次探測時，個案將答案單位誤植為他題，故又被扣了 5 分。

(二) 教學介入後

在教學介入初期，個案能依照提示卡

為分析經後設認知教學策略介入教學後，學生的解題歷程是否會有所改變及了解後設認知教學策略對學障生解二元一次方程式應用題是否有所助益，研究者改編翰林版國中數學第一冊第一章第三節（二元一次方程式應用問題）之內容，融入「後設認知教學策略」加以探討研究，教學及施測地點皆在資源教室進行，正式教學活動步驟承前段所述。

三、學生解題歷程變化

教學時間每週上課四節，每節 45 分鐘，先進行教學 35 分鐘，隨後立即施以 10 分鐘測驗以核對其答對百分率（答對百分率=答對題數/答對題數+答錯題數），以一週時間蒐集學生相關資料，為搭配學校教學進程，教學介入為期兩週，個案施測答對百分率整理為表 2。

之內容步驟化解題；於教學介入後期，個案已可以內隱語言的方式運用後設認知教學策略進行解題，表現趨於穩定（10 分鐘測驗，4 題題目能全部答對），有顯著之正向變化。

四、後設認知教學策略之成效

(一) 建構組織化解題歷程

學障生的學習特徵之一為缺乏適度及足夠之後設認知技能，因此較無法妥善運用自己所具有之能力，常會出現盲目運算、使用題目所給予的所有數字來計算等



不適當的解題策略。教導學生運用後設認知教學策略後，能提升學障生於解題歷程時對其行為的自我覺察、自我監控與自我調整之能力，亦即在解題歷程中引導學生習得以自我教導、自我提問及自我監控等後設認知教學策略，能幫助學生建構組織化之解題歷程，並藉此提升學習成效。

（二）提升學生之動機信念

學障生常因無法擬定計畫、監控解題歷程而屢在學習過程中遭遇挑戰與充滿挫折，如學障生在解二元一次方程式應用題時，可以將題目改寫為代數式，但是並不瞭解其用意；或是學障生在解題之初，便不了解如何將語言訊息轉換為數字符號來加以計算，這些情形都會降低學障生學習二元一次方程式應用題之動機信念。若於教導學障生解二元一次方程式應用題時，融入後設認知教學策略，亦即在解題歷程中，加入自我教導、自我提問及自我監控等成份，將有助於學障生獲得策略知識、指引策略執行與調整策略的使用，將使學障生覺得自己在解二元一次方程式應用題方面是有能力的，能學得比他人好，並能降低其於解題時所產生之焦慮感。

（三）助於學習遷移與類化

教導學障生應用後設認知策略於解二元一次方程式應用題，不僅能立即提升學障生的學習成效，也有助於學障生將自我教導、自我提問及自我監控等後設認知教學策略應用在不同情境、不同題型之應用問題，並且對學習新知識有正向之影響。如學障生在學習新單元一元一次不等

式時，於解題之初，能先了解題目在問些什麼（自我教導），接著詢問自己是否有用 $>$ 、 $<$ 、 \geq 或 \leq 符號，將題目敘述改寫為數學列式（自我提問），並於解題完成後，監控自己在解題過程中的每一步驟是否有掌握應答的線索（自我監控）。

肆、結語

邱上真、詹世宜、王惠川與吳建志（1995）整理國內、外的正式與非正式研究報告指出，數學科是國民中（小）學學生學習感到最有困難的科目之一，並且大約有6~7%的學生具有嚴重數學缺陷。又應用題較一般計算題涉及更複雜的認知歷程（Cummins, 1991），其中，代數應用題又較其他題型更顯複雜（Mayer, 1992），學生可能更易於此處產生學習困難。再者，學障生與一般生相較，有其生理及心理的獨特性與差異性，其數學困難成因又較一般生更形複雜，故教師在教學時，需考量學生的學習特質及教材，提供合適的解題策略以符應學生的學習需求與提升學生的學習成就。

筆者將後設認知教學策略運用於教導國中學障生解二元一次方程式應用題時，除了發現學生於解題歷程有顯著之正向變化情形外，並且學生能從中習得建構一組織化之解題歷程、提升動機信念及助於學習遷移與類化等成效。但是仍然沒有任何一種教學法是最好的，也沒有任何一種教學法可以適用於所有教學情境中，尤其學障生個體間差異甚大，策略的應用仍須依個別差異加以調整。希冀透過筆者粗



略的分享，達到拋磚引玉的效果，期許有志者一起為耕耘這片特教園地努力。

參考文獻

江美娟 (2002)。後設認知策略教學對國小數學學習障礙學生解題成效之研究(未出版之碩士論文)。國立彰化師範大學，彰化市。

邱上真 (1989)。後設認知研究在輕度障礙者教學上的應用。*特殊教育季刊*，30，12-16。

邱上真、詹世宜、王惠川、吳建志 (1995)。解題歷程導向教學對國小四年級數學科低成就學生解題表現之成效研究。*特殊教育與復健學報*，4，75-108。

洪意琇 (2008)。後設認知策略教學對增進國中學習障礙學生代數文字題解題成效之研究(未出版之碩士論文)。國立台北教育大學，台北市。

孫扶志 (1995)。認知策略教學對國小數學低成就學童文字題解題能力之實驗研究(未出版之碩士論文)。國立台中師範學院，台中市。

陳曉萍 (2004)。後設認知策略教學對提升數學低成就學生數學解題能力與數學態度之成效(未出版之碩士論文)。國立台中師範學院，台中市。

張世慧 (2006)。學習障礙導論。台北市：五南。

教育部 (2008)。97年國民中小學九年一貫課程綱要。取自

http://teach.eje.edu.tw/9CC2/9cc_97.php

許雅媚 (2007)。後設認知策略教學對數學學習困難學生時間文字題解題能力影

響之研究(未出版之碩士論文)。國立台北教育大學，台北市。

Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation and other more mysterious mechanisms. In F. E. Weinert, & R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation, and understanding* (pp. 21-29). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cummins, D. D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and instruction*, 8(3), 261-289.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The Nature of Intelligence* (pp. 231-236). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Flavell, J. H. (1987). Speculations about the nature and development of metacognition. In F. E. Weinert, & R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation, and understanding* (pp. 21-29). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. New York, NY: W. H. Freeman and Company.

Montague, M. (1992). The effects of cognitive and metacognitive strategy instruction on mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 25, 230-248.

Montague, M. (1995). Cognitive Instruction



- and Mathematics: Implications for students with learning disorders. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 17(2), 39-49.
- Montague, M. (1997). Cognitive strategy instruction in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30(2), 164-177.
- NCSM (1977). Position paper on basic mathematical skill. *Arithmetic Teacher*, 25, 19-22.
- NCSM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Supervisors of Mathematics.
- NCTM (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Paris, S. G. (1983). *Teaching children to control their reading comprehension skills*. Final Report to the National Institute of Education .University of Michigan.
- Polya (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

