

從小數符號的問題探討學生之小數概念

劉 曼 麗*

摘 要

本篇論文為國小學童「小數與小數運算」概念之調查研究的部份成果。「小數與小數運算」概念包含小數符號意義、小數符號結構、小數應用等三個部份。本文即針對有關小數符號意義的問題(包括圖像表徵及與分數符號的連結兩部分)透過筆試及訪談，來探討學生的小數概念與其迷思概念及可能成因。筆試樣本是透過全國分層隨機取樣而來，包含北一、南一、北二、南二、山地及偏遠等六區四、五、六年級學生，共計 2850 人；而訪談樣本則根據筆試結果選出，包含高、中、低三群學生，共計 80 人。資料分析以敘述統計及內容分析法為主。

研究結果發現，四、五、六年級多數的學生表現都不理想。學生所習得的小數概念似乎顯得相當薄弱。學生因對於小數點左右兩邊的數之意義掌握不夠，不易理解整數部分與非整數部分有何關聯，而有許多迷思概念。在圖像表徵方面，四年級的學生傾向將 a.b 由表面的形式直接轉換成對應的圖像，由此顯示這些學生是將小數點左右兩邊的數(a.b)，視為兩個獨立的整數(a、b)；五、六年級雖能透過分數的觀點來看小數，但對單位量的掌握卻不清楚(對哪一部份分幾份取幾份)。在與分數的雙向連結方面，各年級學生因不清楚小數點左右兩邊數之關係，故易將小數符號由表面形式直接轉換成分數符號(反之亦然)，如將 a.b 化成 $\frac{b}{a}$ (或 $\frac{b}{a}$ 化成 a.b)。

關鍵詞：國小學生、小數、小數迷思概念

*劉曼麗：國立屏東師範學院數理教育研究所副教授

壹、緒言

一、研究背景與目的

現今國小數學教育不只重視技能發展，更是強調概念的發展。概念學習是一切學習的基礎，因為只有正確擷取概念的意義，方可無限延伸，應用到有關事例上。因此，研究學生的數學概念發展，極具重要性及時代意義。有鑑於此，行政院國家科學委員會(簡稱國科會)科教處便於九十年度將「數學概念學習研究」，列為重點項目，先以建立本土性學生「數學概念學習」基本資料庫為主，進而能研究發展學生數學概念學習診斷工具、診斷教學的教學模組。國科會希望藉由概念測量工具發展與診斷教學的設計，以提昇我國學生的數學能力，可看出國家對教育「提昇、紮根」的苦心。另外，在國內國小數學教材中，有關於「數」的領域的安排上，包括有整數、分數、小數與概數等四個主題(教育部，1993)，小數的學習內容分布在三至六年級中，不僅重視小數概念的獲得，也加強小數基本運算的能力，因此，「小數」在國小數學的領域中具有不可或缺的重要地位，而有關學生在小數方面的概念研究，也就顯得相對重要了。

研究計畫：國小學童「小數與小數運算」概念之調查研究，即在此目標導向下產生的，並獲得國科會經費補助，而本篇論文為其部份成果。此研究計畫主要目的在以自行發展的「小數與小數運算」概念之研究工具，進行全國性施測，以瞭解學生的小數概念發展情形，進而探討迷思概念與成因。「小數與小數運算」概念包含小數符號意義、小數符號結構、小數應用等三個部份。本論文只聚焦在有關小數符號意義的部分。

二、名詞釋義

國小學生：九十學年度中的四、五、六年級學生，這些學生皆是接受民國八十一年版的數學科課程。

小數：本研究所謂的小數只以一、二位、三位的純小數與帶小數為研究範圍，並且只限於有理數的範圍內。對於循環小數或無理數

則不包括在內。

貳、文獻探討

一、小數知識的探討

小數的歷史可追溯到西元前 2400 年，當時的巴比倫人便已有位值的概念，不過他們的計數單位是 60，所以小數的實用性便沒那麼明顯。後來經過印度及阿拉伯數學家的改進，便演變成現在我們所看到的。近幾十年來由於受到計算機和電腦的頻繁使用以及強調測量採用公制系統的影響，「小數」在數學的課程日漸受到重視。趙文敏(1985)認為小數表示方式在數學上的地位，則在於其運算的便利性，小數雖是分數的一種表示方式，但同樣在處理部分量的計算，小數計算可以延續整數的運算法則，而不需要像分數一般，另創一套新的運算規則。

關於小數，有三個很重要的定理整理如下(Hiebert, 1992)：

定理 1：小數中的每一個數字所具有的位值是緊鄰其右邊的數字所具有位值的十倍，反之則為十分之一。

定理 2：小數中的每一個數字依其位值來決定大小。以 46.07 為例，第一個數字是 4、位值是 10，所以它的數值是 4×10 ，而第二個數字是 6 其位值是 1，所以它的數值是 6×1 ，第三個數字是 0 其位值是 $\frac{1}{10}$ ，它的數值是 $0 \times \frac{1}{10}$ ，最後一個數字是 7 其位值是 $\frac{1}{100}$ ，它的數值是 $7 \times \frac{1}{100}$ 。

定理 3：小數的數值是它每一個數字所具有數值的總和。以 46.07 為例，它的數值是 $4 \times 10 + 6 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 7 \times \frac{1}{100}$ 。

小數的概念起源於分數的「部分－全體關係」與整數的「位值概念」。在我國的教材中，小數的學習在整數、分數之後。Resnick 等人(1989)曾將小數與整數、小數與分數的異同性做一比較，研究者從中擇其部分稍作修改，並摘要於下表一和二。

表一 小數和整數比較表

小數	整數	+ (類似) - (不同)
A. 各數字所在之位(column)	A. 各數字所在之位(column)	
1.從左而右，位值遞減	1.從左而右，位值遞減	+
2.每一位之值都是緊鄰其右邊的 10 倍	2.每一位之值都是緊鄰其右邊的 10 倍	+
3.0 可表示空位	3.0 可表示空位	+
4.一個數的最右邊增加 0 時，其值不變	4.一個數的最左邊增加 0 時，其值不變	-
5.離小數點越遠，其值越小	5.離小數點越遠，其值越大	-
B. 位名(column names)	B. 位名(column names)	
1.從十分位開始	1.從個位開始	-
2.位名順序是從左到右(十分位，百分位，...)；而讀的順序也從左到右(十分位，百分位，...)	2.位名順序是從右到左(個位，十位，百位，...)；而讀的順序卻從左到右(...，百位，十位，個位)	-
C. 讀的規則(reading rules)	C. 讀的規則(reading rules)	
簡讀(位名不需讀出)	正讀(位名需讀出)	-

表二 小數和分數比較表

小數	分數	+ (類似) - (不同)
A. 小數數值(decimal values)	A. 分數數值(fraction values)	
1.表示 0 與 1 之間的一個值	1.表示 0 與 1 之間的一個值	+
2.整體被分割成越多等分，每一分的數值就越小	2.整體被分割成越多等分，每一分的數值就越小	+
3.在 0 與 1 之間有無限多個小數存在	3.在 0 與 1 之間有無限多個分數存在	+
B. 小數符號(decimal notation)	B. 分數符號(fraction notation)	
1.一個單位被等分成多少等分是隱含在位數中	1.一個單位被等分成多少等分是由分母顯示	-
2.佔多少等分是由小數點後的部份顯示	2.佔多少等分是由分子顯示	-
3.整體被分成 10 的幕次方等分，才能以小數表示	3.整體被分成任何等分，都能用分數表示	-

在表一中小數與整數的不同點，正是干擾學生建構小數概念的原因，如果學生理解不夠，就極易產生整數法則(小數點後數字越多其值越大)、將小數點後的數字讀成整數等迷思概念。在表二中小數與

分數的不同點，正是干擾學生建構小數概念的原因，如果學生理解不夠，就極易產生分數法則(小數點後數字越多其值越小)、分數與小數關係是由表面形式互換等迷思概念。相對地，學生學習小數時所具備的整數、分數經驗，在某方面又會對學生產生助益，例如小數的位值關係(右邊的數字是左邊數字的 $\frac{1}{10}$)是由整數知識類推、小數的意義可由分數的概念了解。

二、與小數相關之教材內容

在八十二年版的課程中有關小數教材的內容，各版本雖然進度稍有不同，但都是依據八十二年數學課程綱要編寫的(教育部，1993)，茲將有關小數教材綱要列於表三：

表三 八十二年數學新課程小數教材綱要表

年級	數	計算
三年級	◎一位小數的認識、化聚、進位與位值 ◎一位小數的數線 ◎十分位、小數、小數點	◎一位小數的加減
四年級	◎二位小數的認識、化聚、進位與位值 ◎二位小數的數線 ◎小數與分數(分母為 10、100、1000 的雙向連結) ◎百分位	◎二位小數的加減
五年級	◎三位小數的認識、化聚、進位與位值 ◎千分位	◎三位小數的加減
六年級		◎乘數、除數是整數的小數乘除 ◎乘數、除數是小數的小數乘除

八十二年數學課程小數教材是從三年級開始介紹，在此階段介紹一位小數的概念。透過 $\frac{1}{10}$ 認識 0.1 的意義，利用十分之幾的分數序列建立起 0.1~0.9 的數詞序列，並會說、讀、聽、寫和做一位小數，透過分數的聯絡進而認識十分位、小數點，並解決 0.1 和 1 的化聚問題。計算部分則分別在連續量和離散量的情境下解決一位小數的合成、分解問題，並用直式記錄過程。

四年級階段介紹兩位小數的概念，透過 $\frac{1}{100}$ 認識 0.01 的意義，在連續量及離散量的情境下認識二位純小數的說、讀、位名及所代表的

量；認識分母為 10、100 與小數的關係，並進行 0.01 和 0.1 的化聚活動。計算部分則分別在連續量及離散量的情境下解決二位帶小數的合成、分解的問題，並利用直式解題紀錄解題過程。

五年級階段介紹三位小數的概念，透過 $\frac{1}{1000}$ 認識 0.001 的意義，在連續量及離散量的情境下認識三位純小數的說、讀、位名及所代表的量；認識分母為 10、100、1000 與小數的關係，並進行 0.001、0.01 和 0.1 的化聚活動。計算部分則分別在連續量及離散量的情境下解決三位小數的合成、分解的問題，並利用直式解題紀錄解題過程。

六年級階段並沒有介紹新的小數，計算部分則分別在連續量及離散量的情境下介紹乘數、除數是整數的小數乘除的意義及算式紀錄；乘數、除數是小數的小數乘除的意義及算式紀錄。

目前國小數學課程二~六年級是以八十二年版為主，而國小一年級已開始進入了九年一貫課程(九十學年度)。各家版本在編寫九年一貫課程的小數教材內容上，雖進度不太相同，但皆是依據數學能力指標所編寫的，茲將有關小數的能力指標整理如下表四：

表四 九年一貫小數教材能力指標表

階段	能力指標
N-1-8	在一個整體 1 被明確十等分的具體生活情境中(包含離散量、連續量)，能以一位小數描述其中的幾分，並能進行一位小數的合成、分解活動(和及被減數 <1)。
N-2-7	能以二位小數描述具體的量，並解決二位小數的合成、分解及簡單整數倍問題。
N-2-19	能利用等分好的線段上，做出一條簡單的整數數線，並能進一步延伸至簡單的分數和小數的數線。
N-3-5	能延伸小數的認識到三位以上(小數)，並解決生活中與小數有關的加、減、乘、除問題。
N-3-6	在具體情境中，能用分數、小數表示除的結果(除的結果為有限小數)。

由表四可知，在第一階段中，先在 1 被明確十等分的情境中，介紹一位小數，約為三年級的課程；在第二階段中，主要以認識二位小數為主，並包括二位小數的加減法及簡單的乘法內容，此為四、五年級的課程；在第三階段中，是以三位小數(或三位以上)的學習內容為主，另包括小數的基本運算，及用小數來表示除的結果，為六、七年級的課程。

有關小數的學習內容，無論是八十二年版或是九年一貫的國小數學課程，還是以一、二、三位小數的認識，和應用小數的加、減、乘、除法解決問題等為主。在國小數學教材中，不僅重視小數概念的獲得，也加強小數基本運算的能力，「小數」已成為「數與計算」中不可或缺的一環了。

三、與小數相關之研究和評量報告

小數很重要，偏偏小數的概念卻是十分複雜，學生在學習上常遭遇困難。根據最近十多年的一些研究結果或評量報告，發現學生在小數方面表現並不理想(周筱亭，1990；簡茂發、劉湘川，1993；艾如昫，1994；吳昭容，1996；杜建台，1996；郭孟儒，2002；陳文利，2001；陳永峰，1998；劉曼麗，1999；2001；Chien，1998；Graeber & Tirosh，1990；Hiebert & Wearne，1986；Kouba，Brown，Carpenter，Lindquist，Silver & Swafford，1988；Resnick，Nesher，Leonard，Magone，Omanson & Peled，1989；Wearne & Hiebert，1986)。許多研究指出學生學習整數時較少有困難，但在學習小數與分數時，就有許多困難。學生學習小數時常會因整數、分數概念而產生干擾(Bell，Greer，Grimison & Mangan，1989；Fischbin，Deri & Marino，1985；Greer，1987；Hiebert & Wearne，1985；1986；1988；Markovits & Sowder，1991；Resnick et al.，1989)。

這些文獻進一步指出：學生在讀小數時，會將小數點後的數字讀成整數(杜建台，1996；劉曼麗，1998a)；在序數小數如遇進位時容易出錯，如 0.9 後就 0.10(劉曼麗，1998a)；在數線上讀小數或標小數時，會弄錯兩小格之間的單位(杜建台，1996；劉曼麗，1998a；Wearne & Hiebert，1986)；在度量衡單複名數的轉換問題時，易放錯小數點(陳永峰，1998；劉曼麗，1998a；Bell, et al., 1981)；在轉換分數為小數時，會將分母當整數、分子當小數或分子當整數、分母當小數(艾如昫，1994；劉曼麗，1998a；2001；Kouba, et al., 1988；Hiebert & Wearne，1983)；在比較小數大小時，有的認為小數點後的數字越多其值越大，但也有的認為其值越小(艾如昫，1994；吳昭容，1996；杜

建台，民 85；陳永峰，民 87；劉曼麗，民 87；劉曼麗，民 88；簡茂發、劉湘川，1993；Wearne & Hiebert, 1986；Resnick, et al., 1989)；在加減小數時，有的未對齊小數點或其結果未標示小數點(艾如昀，1994；陳永峰，1998；劉曼麗，1998a；2001；簡茂發、劉湘川，1993；Hiebert & Wearne, 1986)；在乘除小數時，會放錯積數的小數點或餘數的小數點(艾如昀，1994；陳永峰，1998；簡茂發、劉湘川，1993；Hart, et al., 1981)。此外，更有些學生有「乘法使結果變大」和「除法使結果變小」的錯誤想法(林原宏，1994；陳永峰，1998；Fischbein, Deri, & Marino, 1985)；也有不少的學生不具備小數稠密性概念(劉曼麗，1998a；Hart, et al., 1981)。

另外，Hart 等人(1981)的研究指出，從位值概念的思考角度可以區分小數的認知層次，學生須先具備整數位值概念，然後才能發展小數位值概念。分析的階層如下：

層次一：千位數以內的位值概念。

層次二：一位小數。

層次三：二、三位小數。

層次四：與左邊的位值關係，例如： 5.13×10 後與被乘數的差異。

層次五：更複雜的位值關係，例如 40 個 0.1 相當於多少個 0.01、將 3.7 分成 100 等分，每一等分是多少。

層次六：從除的結果(例如： $59 \div 190$ 接近於①0.03②0.3③3....)發展到小數之間的小數有無限多(例如：寫出介於 0.41 與 0.42 之間的小數)。

他們的研究指出，12 歲的學生大多能達到層次三，但不超過 10% 的學生能達到層次六。

四、促進學生小數概念的學習

小數非常抽象，除了度量外，學生不易由日常生活來連結。以日常生活中使用最頻繁的錢幣為例，我國採用的幣值較大(不像美國)，幾乎是以一元為最小幣值單位(雖有五角硬幣，但幾乎不用)，即使以度量為例，如身高 148.5 公分、體重 35.8 公斤、汽水 1.25 公升等，

但這整數後面的小數部分，習慣上常將之忽略，因而對後面的小數部分並不會產生特別的感覺。所以我國學生對於小數是較不容易體會的。以下的文獻或許可以提供我們一些想法，但如何尋找學生熟悉的素材值得挑戰。

Hiebert(1992) 在「小數認知分析－他們是如何學習的？」一文中認為小數概念可以具體分成三種小數知識：(1) 記數系統知識：知道什麼是小數的形式，什麼不是小數的形式。(2) 運算規則知識：指學生操弄規則以產生正確答案的小數知識。(3) 數量表示的知識：能了解小數所表示數量的意思。Hiebert 非常強調「連結」的觀念，他認為學生在這三種小數知識的連結工作做得並不好，情形如下：

(一)「記數系統知識」與「數量表示的知識」無法產生連結

學生可能只知道記數符號，但卻不了解數學符號的意義。例如學生可能會念 2.56，知道個位是 2、十分位是 5、百分位是 6，但無法理解 2.56 所代表的意義是介於 2 與 3 之間，並且是接近於 2 與 3 的中間，缺乏對於 2.56 這個數所代表的「量感」。在以 100 格的百格板為單位 1 的情形下，要求兒童透過具體來連結抽象符號，以數學積木來表示 2.56 是有困難的。

(二)「數量表示的知識」與「運算規則知識」無法產生連結

學生利用太多時間和注意力在表現運算規則上，使得抽象的數學表徵與具體真實世界的表徵脫離，例如學生知道計算 $1.76 + 0.3$ 時要將小數點對齊，但卻不會做數學積木或百格板的操作，所以不知小數點對齊的理由。

根據上述，Hiebert 提出，如果希望學生對小數概念是真正內化與了解，那就必須加強「記數系統知識」、「運算規則知識」與「數量表示的知識」彼此的連結。

雖然 Hiebert 很強調數量表示知識與其他兩種知識的連結，但吳昭容(1996)也指出，學生在學習小數之前的整數經驗，會對學生的小數學習產生影響。學習數字系統的符號意義，必須透過與指示物的連結，而面對整數問題時，外在表徵的單位 1 通常只佔很小的視覺空

間，以便聚合成一個較大的合成高階單位；但在面對小數問題時，外在表徵的單位 1 又必須被相當程度的放大，以便從事切割的活動，產生在空間上更小的高階單位。所以數學積木被使用來處理十進位系統時，單位 1 是以一立方公分的積木表示，但被用來處理小數十進位系統時，單位 1 必須是以 100 個一立方公分所組成的平面，或是 1000 個一立方公分所組成的大立方體來表示，形成這樣的內在表徵本身對學生就有很大的困難。

既然學習小數必須透過指示物的連結，但學生面對小數指示物又有其本身既有的困難，對於學生學習小數之道，真有「看似容易卻艱難」之感。Wearne 和 Hiebert(1988) 提出學生學習小數知識的四個階段論(連結、發展、精緻與熟練、萃化)，就指出了一條方向，它告訴我們教導學生學習小數不能一味地求「快」，唯有透過每個階段的完全發展，才是真正的小數概念學習。數年後，Hiebert(1992)又進一步提出建議，教師在完整的教學程序可以讓學生建立正確的連結，但需事先規劃：(a)有明確的活動去連結小數的意義、符號。(b)能寫出小數的符號、語意。(c)符號語言的發展。因此，不斷地加強三種知識間的連結，並透過小數學習的四階段發展，是幫助學生學習小數的一項利器。

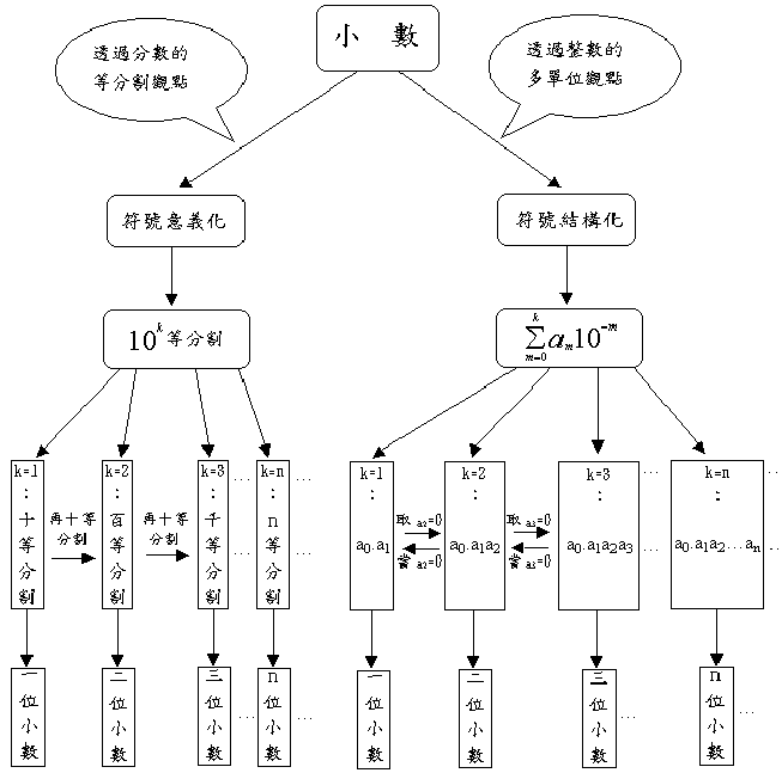
參、研究方法

本篇論文為國小學童「小數與小數運算」概念之調查研究的部份成果。「小數與小數運算」概念包含小數符號意義、小數符號結構、小數應用等三個部份。本篇論文即針對小數符號意義的問題，透過筆試與訪談，對四、五、六年級學生收集資料並採量質並重的方法分析資料，用以探討學生的小數概念與其迷思概念及可能成因。以下只針對研究工具與本篇論文有關的部分說明。

一、研究工具的設計理念

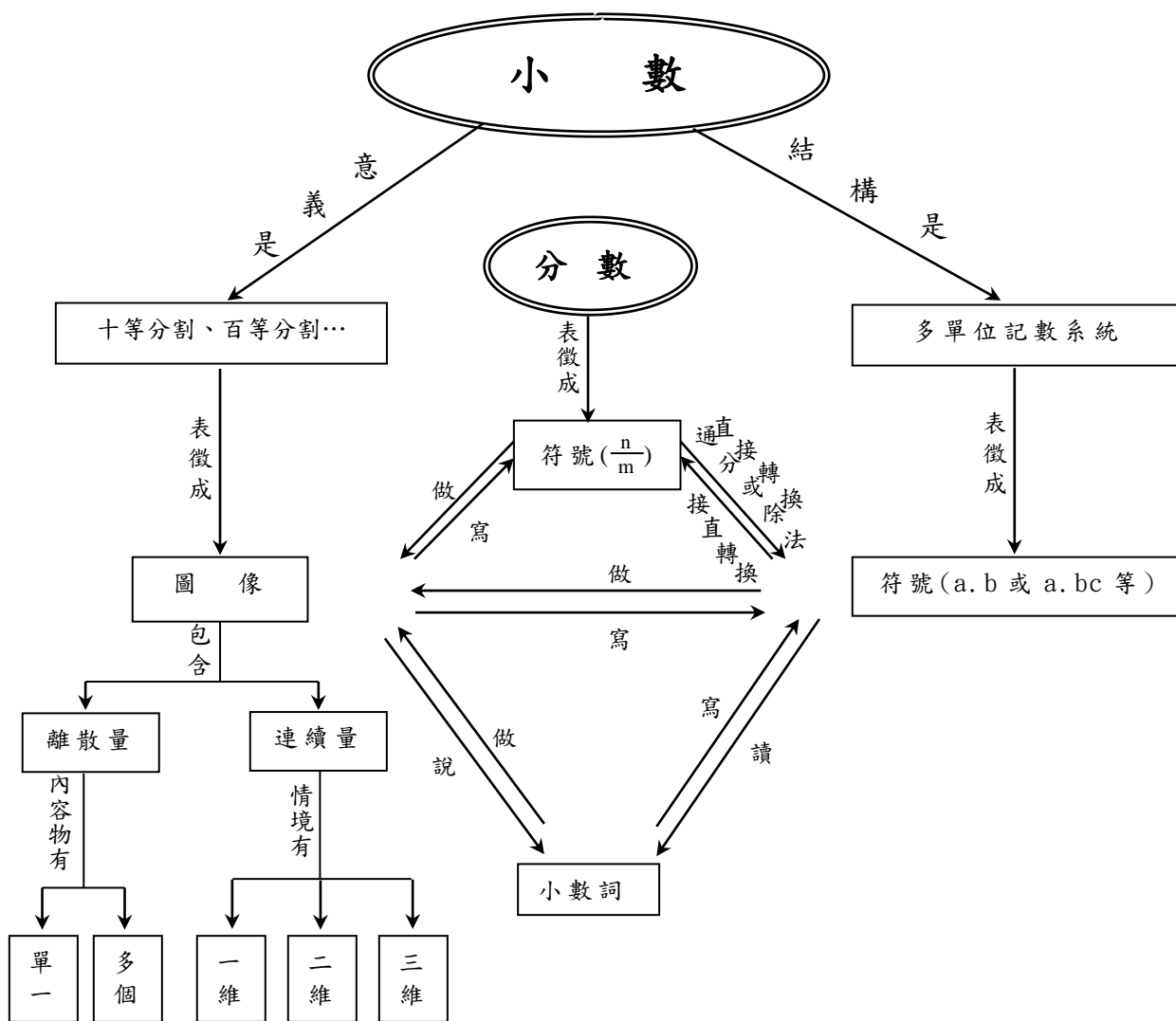
在數學上，小數的意義可透過分數的等分割觀點來了解，小數的結構可經由整數記數系統的類比方式來了解(劉曼麗，1998b)。如從

這兩個觀點切入，可將小數概念的內涵經由符號表徵外顯出來，見下圖一：



圖一 小數概念內涵分析圖

本研究試以小數概念內涵分析圖為主，配合國小小數教材內容，來檢視國小學生應學習的小數概念。關於小數的符號意義，可從小數的圖像表徵、小數與分數的雙向連結來思考其具體成分，其間的關聯見下圖二：



圖二 小數概念架構圖

本研究將依圖二中，所包含的小數概念設計試題，用以了解國小學生的小數概念。

二、研究工具

(一)研究工具的發展與內容

研究工具初稿是歷經數次非正式性的訪談(包括老師與學生)與小規模的筆試而成形。然後，在台灣省的北(台北地區)、中(台中地

區)、東(花蓮地區)、南(高屏地區),各以二所學校內的各一班四、五、六年級學生,其中四年級 267 人、五年級 282 人、六年級 276 人總計 825 人,進行全國第一次預試,也請台北市一所學校內的資優班學生 12 人填寫試卷,以瞭解試卷作答結果可能的最好表現。此外,請 10 位專家學者,填寫專家效度問卷。接著,以第一次預試及專家效度問卷結果所修正後的研究工具,對高屏地區的 2 所學校內各二班的四、五、六年級學生,其中四年級 125 人、五年級 154 人、六年級 149 人總計 428 人,再進行第二次預試,並作信度分析。另外,也請 2 位專家學者,再進行第二次專家效度問卷,其中一位曾填寫過第一次專家效度問卷。最後再修正與定稿,而形成了本研究工具—「小數與小數運算」概念調查工具。

研究工具乃是依據小數概念架構圖的內容編製而成。在筆試部分,有關小數符號意義的問題共計 12 題,包括圖像表徵 10 題及與分數符號的連結 2 題(見附錄),試題內容分配見下表五。

表五 試卷內容分配表

小數概念		題號	
小 數	連續量圖像表徵	一維	1-1(一位)、1-6(二位)
		二維	1-2 & 1-8(一位) 1-7 & 1-10(二位)
符 號 意 義	離散量圖像表徵	內容物單一	1-3(一位)、1-9(二位)
		內容物多個	1-5(一位)、1-4(二位)、 訪談題 2(三位)
義	與分數雙向連結	小數化分數	1-12
		分數化小數	1-13

在訪談部分,分 A、B 部分進行,A 部分的訪談在於補充筆試不易探討的小數概念,內容以估算題為主(不在本文探討範圍內),五、六年級學生再增加三位小數表徵問題;B 部份則以筆試內容為主。

(二)研究工具的信度與效度

研究工具的信度,包括筆試工具的 α 信度及重測信度。由於六年級學生因畢業日期提前結束,所以重測部分,僅以參加第二次預試之高屏縣市的兩所學校內各一班四、五年級學生,四年級有 62 人,五

年級有 70 人，共 132 人，重測間隔的時間與第二次預試相差二週。以下將筆試工具的信度值整理如下表六。

表六 筆試工具信度表

α 信度 試卷 內容 (重測信度)	年級	四年級	五年級	六年級
整份試卷		.85(.84)	.89(.70)	.90(×)
小數符號意義		.74(.62)	.82(.63)	.80(×)

由表 6 可知，在「小數與小數運算」調查工具的 α 信度，各年級皆高達 .85 以上；而在小數符號意義的問題方面，各年級的 α 信度值也有 .70 以上。關於重測信度方面，四、五年級也達 .70 以上；在小數符號意義的問題方面，四、五年級的重測信度皆為 .60 多。

在效度方面，研究工具是依據小數概念架構圖並配合國小小數教材而設計的。此外，並請熟悉小數教材的師院教授、課程編輯委員及國小資深教師等專家，針對筆試工具作了兩次審查，所以筆試工具應有不錯的效度。

三、研究樣本

本研究樣本是透過全國分層隨機取樣而來。參照羅啟宏的研究(1992)，將台灣地區 356 鄉鎮市區依據地理位置特性分成北一(台北市 12 區)、南一(高雄市 11 區)、北二(台中以北省縣轄市及工商、新興鄉鎮市共 52 鄉鎮市區)、南二(台中以南省縣轄市及工商、新興鄉鎮市共 95 鄉鎮市區)、東區(東部縣轄市及工商、新興鄉鎮市共 13 鄉鎮市區)、山地及偏遠地區(偏遠鄉鎮共 173 鄉鎮市區)等六層。再以九十學年度教育部登錄之全國公私立國民小學的四、五、六年級班級數作為抽樣母群，先依母群的地理特性予以分層後，再依各層分配的班級數，採抽取率與大小成比例，抽出四、五、六年級學生，做為研究樣本。各層內四、五、六年級的班級數及其抽樣分配統計如下表七，而各層所抽出的樣本人數如下表八：

表七 各層內四、五、六年級的班級數分配表

分層	年級	四年級班級數 (抽樣班級數)	五年級班級數 (抽樣班級數)	六年級班級數 (抽樣班級數)
	班級數 (抽出班數)			
北一		1105(3)	1136(3)	1141(3)
南一		705(2)	645(2)	639(2)
北二		3160(9)	2919(9)	2885(9)
南二		3530(9)	3213(9)	3206(9)
東區		366(1)	326(1)	332(1)
山地及偏遠地區		1994(6)	1863(6)	1857(6)
總計		10860(30)	10102(30)	10060(30)

表八 研究樣本人數分配表

區域 (抽出學校數)	年級	四年級	五年級	六年級	總計
	人 數				
北一區(3)		88	81	91	260
南一區(2)		58	79	72	209
北二區(9)		288	301	304	893
南二區(9)		285	312	332	929
東區 5 區(1)		30	34	30	94
山地及偏遠地區(6)		149	155	161	465
總計		898	962	990	2850

表八所列的 2850 人即為本研究之筆試樣本，而訪談樣本將依據筆試結果選出。

四、資料收集與分析

本研究透過筆試與訪談來收集資料。筆試施測時間為民國九十一年五月中旬，經過半個月，待資料收齊整理並統計完後，並於六月上旬開始進行為期一週的訪談。茲將資料的收集過程及分析方式說明如下。

(一)筆試

筆試資料收齊後，先將樣本依其所屬的學校、年級及班級加以編碼，第 1、2 碼為學校代碼，表示該校所屬區域及學校代稱，第 3 碼代表年級(4：四年級、5：五年級、6：六年級)，第 4、5 碼為學生編

號(01 表第 1 位學生)。如 1a504 是代表第 1 區 a 校的五年級第 4 位學生。其次，依照題號下的小題和小問題加以建檔，如 1-1-b 係表示第一大題下的第 1 小題中第 b 個問題，在每一個小問題下，輸入學生所填寫的答案，題目若為選擇題，則輸入學生所選答的答案，如非選擇題，則依學生的答案類型予以編號。資料輸入完畢後，以 spss 統計軟體作統計分析，求出學生填寫答案的次數分配，以瞭解各年級學生在每一題的答題表現以及每個學生的個人表現。

(二)訪談

訪談資料的收集，係由五位有訪談經驗的研究生擔任。在訪談進行前，五位訪談人員不但已熟悉本研究目的，彼此商討訪談方式的進行及要領，並且模擬訪談當時可能出現的狀況，以利訪談能順利進行。訪談對象的選取，係以全部四、五、六年級學生的筆試表現，由高至低排序後，依前、後 27%的比例，將其分為高、中、低三群。以立意取樣方式，選取高屏地區 5 所學校後，並針對各校四、五、六年級落在高、中、低三群的學生，各選取 2 名學生，預計四、五、六年級各 30 人，共 90 人進行訪談。其中，有一校因無四年級高分群學生，所以在另外 2 所學校中，各自加一位四年級高分群學生。又部分學校因臨近期末，行政因素無法配合，造成部份訪談無法順利進行，所以四、五、六年級實際的訪談樣本各有 25、26、29 人，共 80 人。

訪談後，先將訪談內容進行轉錄，再整理每一題內各年級訪談樣本的主要想法，以利討論學生答對或答錯的原因，並配合筆試結果，探討學生的小數概念及其迷思概念與成因。

肆、結果與討論

接受筆試的學生，四年級有 898 人、五年級有 962 人、六年級有 990 人，共 2850 人。「小數符號意義」的問題共 12 題，包括圖像表徵 10 題及與分數符號的連結 2 題。各年級學生在「小數符號意義」的筆試結果統計如表九：

表九 筆試結果統計表

年級	小數符號意義
四年級	5.06 (42.20%)
五年級	6.29 (52.45%)
六年級	7.50 (62.48%)

由表九可知，學生平均答對題數皆隨年級而遞增。四年級平均答對題數約 5 題(42.20%)，表現很差；五年級平均答對 6 題多(52.45%)，表現也不好；六年級平均答對 7 題半(62.48%)，表現也不甚理想。

一、小數圖像表徵

在小數圖像表徵部分是透過連續量及離散量的情境，來了解學生對於小數符號所賦予的意義，進而探討學生的小數概念。在筆試部分，題 1-1 和 1-6 是屬一維連續量；題 1-2、1-7 和 1-10 是屬二維連續量；題 1-8 是屬三維連續量；題 1-3 和 1-9 是屬離散量內單(單位小數內容物為單一個物)；題 1-4 和 1-5 是屬離散量內多(單位小數內容物為多個個物)，共計 10 題。

由於三位小數的千等分割不易於筆試中呈現，所以僅在訪談時探討。考量連續量下的千格板，呈現出來的千等分割(千格)與離散量內單的感覺相近，且學生在筆試部分，又以離散量內多情境的表現較不好，而四年級學生又未學過三位小數，所以僅以離散量內多情境對五、六年級進行訪談。在訪談時，由訪談人員親自帶一袋綠豆到現場，特讓訪談學生感受內容物離散的情形。有關學生的作答結果統計整理如下表十：

表十 在圖像表徵的筆試及訪談結果統計表

概念	題號	答對率			主要錯誤選項(%)			
		四年級	五年級	六年級	四年級	五年級	六年級	
連	1-1	51.6	61.5	78.1	①(19.6) ②(15.8)	②(14.1) ①(12.6)	②(7.2)	
	一位 小數	1-2	55.1	62.3	68.4	④(12.5) ③(10.9)	④(9.8) ①(8.5)	①(10.9) ④(7.8)
續	1-8	75.6	82.0	87.7	④(8.8)	④(5.4)	④(3.7)	
量	二位	1-6	37.9	57.2	62.8	③(30.7)	③(23.3)	③(23.9)
	小數	1-7	36.9	56.0	64.5	⑤(36.6)	⑤(27.8)	⑤(24.3)
		1-10	45.0	50.3	59.4	②(35.9)	②(37.1)	②(32.5)
離	一位	1-3	69.9	77.5	84.9	①(8.5) ③(8.1)	①(7.1)	①(4.7)
	小數	1-5	6.3	14.1	27.8	②(65.4)	②(63.2)	②(57.2)
散	二位	1-9	75.5	77.5	83.6	③(7.6)	①(5.9) ③(4.3)	①(3.1) ④(3.4)
	小數	1-4	6.7	12.8	19.0	③(68.4)	③(65.5)	③(64.3)
量	三位 小數	訪談 題 2	×	23.1	27.6	×	1(23.1)	1(10.3)

註：選項內容請見附錄。

從學生在圖像表徵的表現來看，其各題的答對率均隨年級而遞增。四年級從不到一成~七成以上；五、六年級則從不到二成~八成以上，學生的表現差距很大。可見，學生在此部份的概念並不穩固。

在一位小數的問題，各年級學生在連續量與離散量內單情境的表現相近，在離散量內多情境表現最差。在二位小數的問題，各年級學生在離散量內單情境表現最好，其次是連續量情境，最糟的還是離散量內多情境。在三位小數的問題，僅有訪談的離散量內多情境，但學生在此部份的表現，亦屬不理想。整體而言，學生在離散量內單的情境表現最好，其次是連續量情境，最差的是離散量內多情境。

從訪談得知，學生答對的想法主要皆能從等分割的觀點來解題，如：

十等分割

4C420(M, 題 1-1: 3.2 條鐵絲怎麼表示, ③)

S: 因為 3.2 條的 2 是 0.2, 0.2 條不滿 1 條, 所以將一條分成 10 等份, 取其中的 2 等份, 然後再加上 3.2 條的 3 表示有 3 條。

4C505(H, 題 1-8: 7.6 杯水怎麼表示, ①)

S: 7.6 杯就是有 7 個 1 杯, 又 0.6 杯。

R: 那 0.6 杯要怎樣表示?

S: 就是拿 1 杯, 分 10 等份取其中的 6 等份。

4B608(H, 題 1-5: 5.3 袋糖果怎麼表示, ④)(一袋 20 顆)

S: 因為它這裡有 5.3 袋, 然後第四個答案有 5 袋, 那這 6 顆就是 0.3 袋。

R: 為什麼要選這個有 6 顆的, 不選有 3 顆的?

S: 因為它這裡有 20 顆, 如果把它分成 10 份的話就是 2 顆, 所以 3 乘以 2 就等於 6。

百等分割

4C423(H, 題 1-7: 6.03 個蛋糕怎麼表示, ③)

S: 因為 6.03 個的 6 要先畫 6 個蛋糕, 那 0.03, 把 1 個分 10 格, 那 1 格是 0.1, 然後 0.1 再分成 10 份, 這 1 小格是 0.01, 3 個 0.01 是 0.03, 所以畫 3 小格。

4C619(H, 題 1-4: 4.02 包巧克力怎麼表示, ①)(一包 200 顆)

S: 因為 4.02 包的 4 就畫 4 包巧克力, 然後 0.02 就是一百分之二, 再用 $200 \div 100 = 2$, $2 \times 2 = 4$ 。

千等分割

4C607(H, 訪談題 2: 1.234 袋(1.23 袋)綠豆怎麼表示, 1)(1 袋 2000 顆)

R: 一袋綠豆有 2000 顆, 1.234 袋綠豆要怎樣表示才對?

S: 1 袋又 468 顆。

R: 為什麼會有 468 顆?

S: 因為 0.234 袋是 1000 份的 234 份, $234 \times 2 = 468$ 。

R: 為什麼 234×2 ?

S: 因為 1 份等於 2 顆。

R: 那 1.23 袋要怎樣表示?

S: 1 袋又 460 顆。

R: 為什麼又變成 460 顆?

S: 因為 0.23 袋是 100 份中的 23 份, $23 \times 20 = 460$ 。

R: 為什麼要 23×20 ?

S: 因為 2000 顆分 100 份, 1 小份有 20 顆。

此外，在五、六年級部分，更多了用擴分、乘除法等方式來解題的情形，而此類學生以高程度為主，如：

利用擴分

4C505(H, 題 1-4: 4.02 包巧克力怎麼表示, ①)(一包 200 顆)

S: 因為 **0.02 等於一百分之二**，然後擴分變成二百分之四，所以是 4 顆。

利用乘法

4C505(H, 題 1-3: 5.4 盒雞蛋怎麼表示, ②)(一盒 10 顆)

S: 因為 **5.4 盒乘以 10 就等於 54 顆**，那 54 顆的表示方法就是 5 盒雞蛋又 4 顆。

2B605(H, 題 1-5: 5.3 袋糖果怎麼表示, ④)(一袋 20 顆)

S: **0.3 要乘以 20 是 6**，就是 6 顆。

還有一點值得說明的是，有些學生在此部份雖然答對，但概念不見得正確。像是在離散量「單一」的情境中，有的學生將小數點左邊的數視為大單位的個數，右邊的數視為小單位的個數來解題。如果將此想法也用在離散量「內多」的情境中，就顯然不對了。如：

4C513(M, 題 1-3: 5.4 盒雞蛋怎麼表示, ②)(一盒 10 顆)

S: 因為 **5.4 盒的 5**，所以是 5 盒雞蛋，**5.4 盒的 4**，所以是 4 顆雞蛋。

4C513(M, 題 1-5: 5.3 袋糖果怎麼表示, ②)(一袋 20 顆)

S: 5 就是 5 袋，3 就是有 3 顆的意思。

也有學生雖然透過等分割的觀點解題，但不認為一定要十、百等分割，只要能取出 b 份即可，而此類學生皆為低程度，如：

4C529(L, 題 1-1: 3.2 條鐵絲怎麼表示, ③)

S: 3.2 條的 3 有 3 條，那 2 表示 0.2 條，將 1 條分 10 份，取其中兩份。

R: 可不可以分 8 份？

S: 可以。

R: 那要拿幾份？

S: 2 份。

4C413(L, 題 1-7: 6.03 個蛋糕怎麼表示, ⑤)

S: 因為 6.03 個的 6，要先畫 6 個蛋糕，再畫 1 個蛋糕，把它等分成 10 份，取其中的 3 份。

R: 你怎樣表示 0.03 個？

S: 畫 1 個蛋糕，把它等分成 10 份，取其中的 3 份。

R：為什麼要分成 10 份？

S：分幾份都可以，只要取其中的 3 份就可以了。

再從學生答錯的原因來看，發現學生並未了解小數的意義，大多將小數的符號表徵「a.b」看成是一種二個向度的東西，其中一類是將小數點前後的數當作兩個獨立的整數來處理，並將這兩個整數的單位視為相同，如：

4C507(L, 題 1-1：3.2 條鐵絲怎麼表示，①)

S：因為 3.2 條的 3 就是 3 條，點就是點，2 就是 2 條。

6C507(L, 題 1-2：4.3 個蔥油餅怎麼表示，③)

S：因為 4.3 裡面有 4 和 3，就是要有 4 個和 3 個，而且中間又有一個小數點。

6C419(L, 題 1-6：3.02 條鐵絲怎麼表示，⑥)

S：先畫出 3 條鐵絲，再點一個點，再畫出兩條鐵絲。

但也有的則區別小數點前的整數部份為大單位部分，小數點後的整數部份為小單位部分，如：

6C413(M, 題 1-5：5.3 袋糖果怎麼表示，②)(1 袋 20 顆)

S：5.3 就 5 袋再點 3 顆。

4C511(M, 訪談題 2：1.234 袋(1.23 袋)綠豆怎麼表示，3)(1 袋 2000 顆)

S：一袋又 234 顆。

R：為什麼有 234 顆？

S：因為 0.234 袋，所以是 234 顆。

R：那麼，1.23 袋綠豆要怎樣表示呢？

S：一袋又 0.23 袋，所以是 23 顆。

另一類學生雖然知道小數點後的數是代表非完整的量，但對真正的單位量並未掌握清楚，此類主要有兩種情形，一種是將 a.b 認為是 a 個和 b 等份中的一份，如：

4C625(M, 題 1-2：4.3 個蔥油餅怎樣表示，①)

S：因為 4.3 個有 4 個啊，再看一個分三份取一份。

R：為什麼分三份？

S：因為 4.3 的 3 不夠一個，所以分三份，取其中一份。

R：這樣子取的話，那這個 3 是表示多少？

S：三分之一。

4C413(L, 題 1-6: 3.02 條鐵絲怎樣表示, ㉟)

S: 因為 3.02 條的 3, 要先畫 3 條鐵絲長, 再畫一條, 把它等分成 2 份, 取其中的 1 份。

R: 3.02 條的 2 表示多少?

S: 0.02 條。

R: 你怎樣表示 0.02 條?

S: 畫一條, 把它等分成 2 份, 取其中的 1 份。

還有一種情形則是將 a.b 認為 a 等份中的 b 份, 如:

2B430(M, 題 1-1: 3.2 條鐵絲怎樣表示, ㉠)

S: 總共分了 3 條, 拿取了其中兩段。

R: 那三分之二是什麼意思啊?

S: 例如一個餅乾切成 3 塊, 然後有一個人取走了其中的兩塊就是三分之二。

R: 那你覺得三分之二跟 3.2 一不一樣?

S: 一樣。

4C413(L, 題 1-2: 4.3 個蔥油餅怎樣表示, ㉡)

S: 將一個蔥油餅等分成 4 份, 取其中的 3 份。

R: 為什麼要分成 4 份?

S: 因為 4.3 個的 4。

R: 為什麼要取其中的 3 份?

S: 因為 4.3 個的 3。

R: 如果是 4.2 個呢?

S: 將一個蔥油餅等分成 4 份, 取其中的 2 份。

4C624(L, 題 1-3: 5.4 盒雞蛋怎樣表示, ㉢)

R: 為什麼要將一盒雞蛋分成 5 等份?

S: 5.4 盒的 5。

R: 為什麼要取其中的 4 份?

S: 因為有 0.4 就要取 4 份。

2B430(M, 題 1-9: 5.01 盒巧克力怎樣表示, ㉣)

S: 因為 100 顆啊, 先把它分成五等份, 然後再取出一等份。

R: 你是怎麼知道要分五等份的?

S: 因為上面是寫 5, 應該是下面把它分成五等份。

4C513(M, 題 1-9: 5.01 盒巧克力怎樣表示, ㉤)

S: 5.01 就是分成五份, 取其中的 1 小份。

R: 那 5.01 跟五分之一有什麼關係?

S: 一樣。

此外，在二位小數的連續量情境問題，從學生的解釋中，發現主要的錯誤是學生將 $a.0b$ 中的 b 看成是從十等分割出來的，但此類學生不乏高程度或六年級的學生，如：

2B417(H, 題 1-6: 3.02 條鐵絲怎樣表示, ㊸)

S: 因為他 02, 這邊剛好是 3 段, 這邊一段, 02 的話就是小數 $2/10$, 就兩格。

4B618(M, 題 1-6: 3.02 條鐵絲怎樣表示, ㊸)

S: 先取 3 等份, 再畫 1 等份, 把這 1 等份分成 10 等份, 取其中的 2 等份。

R: 為什麼要把這 1 等份分成 10 等份?

S: 它是 0.02, 先取 10 等份, 再取 2 等份。

R: 10 等份裡面的 2 份是 0.02 嗎?

S: 對。

4B618(M, 題 1-7: 6.03 個蛋糕怎樣表示, ㊸)

S: 因為它說要 6 個蛋糕, 還要 0.03 個蛋糕, 就是一個蛋糕分成 10 份, 取其中的 3 份。

4C625(M, 題 1-10: 4.02 張紙怎樣表示, ㊸)

S: 因為 4.02 有 4 張, 然後一張再平分成十份、取 2 份就是 0.02。

6D427(H, 題 1-10: 4.02 張紙怎樣表示, ㊸)

S: 因為它說要四張, 先畫四張, 然後要 0.02, 這裡要畫成十等份, 取兩等份。

然而，從訪談結果中，並無進一步的資料可以顯示，造成這樣的原因，是否因為學生將 0 省略了，值得進一步深究。

綜合上述分析結果，在一位小數的連續量問題，以三維的容量情境表現最好，這有可能是因為容量的情境，經常出現於自然科或生活情境中，且量杯中有呈現刻度，所以學生較易感受到十等分割的現象，造成答對率偏高。

在二位小數的連續量問題，各年級的表現並不理想。由於題 1-6 及 1-7 的百等分割是透過十等分割後再十等分割來呈現，對學生而言，是較為陌生的情境，所以答對率並不高，應屬當然。然而，題 1-10 的百等分割是教材內常出現的情境，但五、六年級答對率也不到六成，甚至比題 1-6 及 1-7 還差，蠻耐人尋味的。經反覆思索後，是否是因為試題 1-6 和 1-7 的正確選項較為特別，所以會引起猜題學生

的注意？亦或是學生認為 $a.0b$ 是有 a 個完整的和 b 小份，但 b 小份指的是 10 份中的 b 份，還是 100 份中的 b 份，並不特意區分，恰巧題 1-6 和 1-7 的正確選項較早出現而題 1-10 的較晚出現，造成學生在後者的答題表現略差。

在離散量情境，各年級在內單的表現均比內多好很多。究其原因發現，在離散量內多情境中，學生縱使有等分割的概念，但仍覺得等分割後的每一份內的數量是「1」，忽略每一份內的個數為多個，所以表現都不好。

整體而言，從學生在此部分的表現，顯示學生對於小數的意義並不容易掌握。從學生以 4 個蔥油餅加一個點，再畫 3 個蔥油餅來表徵 4.3 個蔥油餅等類的表現來看，顯示學生可能知道小數點「.」分隔兩個部分的作用，但卻透過整數的觀點將兩邊的數當作獨立的整數來處理，可說是未能理解小數概念，其中以四、五年級較多。類似的研究結果曾出現在 Greer(1987)的研究中。

另外，有的學生認為 $a.b$ 個就是 a 個及將單位量分成 b 份取其中的一份；有的甚至認為只要能取出 b 份，將單位量作幾等分割都可以。這類的表現顯示學生雖已能將小數點左右兩邊的數分別以整數與非整數部分視之，但對於單位量為何，以及單位量和非整數部分的關係並不清楚，對小數概念可說是一知半解，其中五、六年級有錯誤想法的學生以此類居多。類似的研究結果曾出現在 Markovits 與 Sowder(1991)的研究中。事實上，本段與上段所提的學生，如從 Hiebert(1992)的觀點而言，就是這些學生在「記數系統知識」與「數量表示的知識」無法產生連結。

倘若學生不但能知道小數點分隔了整數與非整數部分，也能知道兩部分各與單位量的關係，方可說是能理解小數概念。例如，在解內容物多個的離散量情境問題，能將單位量做十等分割、百等分割，找出單位分量來解題。然而這類學生即使是在六年級也不多見，可見我國學生對小數概念普遍來說都不是很清楚。

二、小數與分數雙向連結

在小數與分數雙向連結部分是單從符號觀點切入。題 1-12 是將小數 9.7 化成分數，1-13 是將分數 $\frac{4}{5}$ 化成小數，由此二題來探討學生小數與分數雙向連結的概念。有關學生的作答結果統計整理如下表十一：

表十一 在小數與分數的雙向連結的筆試結果統計表

概念	題號	答對率			主要錯誤選項(%)		
		四年級	五年級	六年級	四年級	五年級	六年級
小數化分數	1-12	37.3	49.2	57.1	③(43.2)	③(35.0)	③(22.2)
分數化小數	1-13	4.3	24.5	51.1	①(69.6)	①(48.4)	①(26.2)

由答對率來看，兩題均隨年級而遞增，但幾乎都在五成以下，表現不甚理想。其中四年級在分數化小數的答對率劇降；五年級下降一半；六年級則略減，顯示兩題答對率的差距隨著年級縮減。由答錯情形來看，各年級在兩題的主要錯誤一致，即是將 9.7 以 $\frac{7}{9}$ 表示，將 $\frac{4}{5}$ 以 5.4 來表示，在艾如昀(1994)、劉曼麗(2001b)、Kouba, et al.(1988)、Hiebert 和 Wearne(1983)等的研究中亦有類似的發現。進一步統計發現，四、五、六年級有此系統性錯誤者，分別佔四、三、二成。相較各年級在這兩題主要錯誤選項的選答率，四年級後題較前題多了近三成(69.6%，43.2%)，五年級多了一成(48.4%，35.0%)，六年級則比率相當(26.2%，22.2%)。這些在後題多出來的學生大部分反而在前題選答正確，此結果同時也說明了四年級學生在後題的答對率下降三成多，四年級下降二成的原因。

分數化小數題的前三個選項(5.4、4.5、1.25)是十分不合理的答案，但四、五、六年級的學生卻分別有近八成、六成、四成選了其中之一。此結果顯示學生並未對答案的不合理性提高警覺，或者這些學生並未想到 $\frac{4}{5}$ 比 1 小。

根據訪談結果，在小數化分數題答對的學生多能掌握小數的意義，從十等分割的觀點連結分數。如：

6C505(H, 題 1-12: 將小數 9.7 化成分數, $9.7 \rightarrow 9\frac{7}{10}$)

S: 因為他吃了 9 個, 0.7 就是 10 等份裡面的 7 份。

4C421(H, 題 1-12: 將小數 9.7 化成分數, $9.7 \rightarrow 9\frac{7}{10}$)

R: 為什麼選 $9\frac{7}{10}$?

S: 9.7 的 9 是九個小蛋糕, **0.7 就是十份裡的七份**, 所以 9.7 等於 $9\frac{7}{10}$ 。

在分數化小數題答對的學生是藉由擴分將分數先化為分母為 10 或 100 的等值分數, 再直接轉換成小數。如:

6C505(H, 題 1-13: 將分數 $\frac{4}{5}$ 化成小數, $\frac{4}{5} \rightarrow 0.8$ 杯)

R: 為什麼答案是㉔?

S: 因為 5 份其中的 4 份, 如果把 5 份當作 10 份來看, 4 份當作 8 份來看就是 0.8。

4C628(M, 題 1-13: 將分數 $\frac{4}{5}$ 化成小數, $\frac{4}{5} \rightarrow 0.8$ 杯)

S: 因 5 是 $10 \div 2$, 所以擴分 $5 \times 2 = 10$, $4 \times 2 = 8$, 五分之四變成十分之八, 答案就是 0.8。

R: 為什麼分母要變成 10?

S: 因為十分之一等於 0.1。

6C609(M, 題 1-13: 將分數 $\frac{4}{5}$ 化成小數, $\frac{4}{5} \rightarrow 0.8$ 杯)

S: 現在先把分母變成 100, 要乘以 20; 然後分子 4 再乘以 20 是 80, 它就變成 0.80, 最後再把它 的 0 去掉, 答案就是 0.8 了。

另外, 也有學生是將分數轉換成除法算式, 進行運算求得小數的答案。如:

6C617(H, 題 1-13: 將分數 $\frac{4}{5}$ 化成小數, $\frac{4}{5} \rightarrow 0.8$ 杯)

R: 為什麼選 0.8?

S: 因為 $4 \div 5$ 。

R: 4 除以 5 和 $\frac{4}{5}$ 有什麼關係? 你怎麼知道把 4 除以 5, 就可以得到答案?

S: 因為 **4 除以 5 就等於 $\frac{4}{5}$** 。

由筆試結果得知, 各年級具有系統性錯誤者以中、低程度學生較多, 但四、五年級高程度者也不乏其人。從訪談中, 可看出這類學生的錯誤想法主要是將小數與分數符號中的數字從表面形式直接轉換。如:

4B430(H, 題 1-12: 將小數 9.7 化成分數, $9.7 \rightarrow \frac{7}{9}$; 題 1-13: 將分數 $\frac{4}{5}$ 化成小數, $\frac{4}{5} \rightarrow 5.4$)

R: 9.7 化成分數要怎麼表示?

S: 如果小數化成分數的話, **點代表分數**所以是 $\frac{7}{9}$ 。

R：那 $\frac{4}{5}$ 杯你怎麼用小數表示？

S：就是 5.4 杯

R：你怎麼看的？

S：先把分母移到這邊，接下來把這一條數線變成小數點，分子再移到這邊來。

4B615(M, 題 1-12：將小數 9.7 化成分數， $9.7 \rightarrow \frac{7}{9}$ ；題 1-13：將分數 $\frac{4}{5}$ 化成小數， $\frac{4}{5} \rightarrow 5.4$)

R：為什麼選 $\frac{7}{9}$ 呢？

S：因為我是把前面的數字放在下面，後面的數字放在上面。

R：為什麼呢？

S：那個小數點就是(指 7/9)中間的這一條線。

R：小數點就是分數的這一條線？

S：嗯。然後...嗯...就分開 9 和 7，一邊是 9，一邊是 7。

R：那 $\frac{4}{5}$ 用小數怎麼表示？

S：跟剛才一樣。把中間的這一條線變成點，就是 5.4 了。

另有學生在將小數與分數連結時，認為小數的整數部分是指全體，所以要寫在分母；不足一的是部分，所以要寫在分子。如：

4C624(L, 題 1-12：將小數 9.7 化成分數， $9.7 \rightarrow \frac{7}{9}$ ；題 1-13：將分數 $\frac{4}{5}$ 化成小數， $\frac{4}{5} \rightarrow 5.4$)

R：你為什麼選 ③？

S：9.7 的是要分 9 份，而 7 就是取其中的 7 份。

R：那 6.7 用分數表示？

S：六分之七。

R：那 $\frac{4}{5}$ 呢？

S：五份取四份就是 5.4 杯。

R：為什麼五份取四份就是 5.4？為什麼不是 4.5？

S：全部有五份，就要寫這裡(指 5)。五份裡面取四份就不到一，所以要寫在這裡(指 4)。

R：為什麼不到一要寫在這裡(指 4)？

S：這裡是小數，就是不到一的部分。

另有四、五年級學生在前題選答正確($9.7 \rightarrow 9\frac{7}{10}$)，卻在後題選答錯誤。這些學生只能從分母為 10 的觀點直接將小數與分數連結，當遇到分母非 10 的分數時無法變通，只能回到從表面有的數字來拼湊答案。有些學生直接將 $\frac{4}{5}$ 轉換成 5.4，如：

6D427(H, 題 1-12: 將小數 9.7 化成分數, $9.7 \rightarrow 9\frac{7}{10}$; 題 1-13: 將分數 $\frac{4}{5}$ 化成小數, $\frac{4}{5} \rightarrow 0.8$)

R: 你為什麼選◎呢?

S: 因為它(指 9.7)有九, 九是整數, 然後這邊的點七就是十分之七。

S: 對!

R: 那這一題你選的是 5.4, 為什麼覺得是 $\frac{4}{5}$ 是 5.4?

S: 因為 $\frac{4}{5}$ 是五份裡面的四份, 就是 5.4。

R: 為什麼五份裡面的四份, 就是 5.4?

S: 我用猜的, 因為這個(指 5.4)有 5 和 4, 比較像。

但也有些學生雖知道 $\frac{4}{5}$ 比 1, 先將前三個大於 1 的選項刪除, 可是在面對 0.4 和 0.8 時, 又回到了從表面數字來想答案, 選了與分子有相同的數字作答案, 如:

6D413(H, 題 1-12: 將小數 9.7 化成分數, $9.7 \rightarrow 9\frac{7}{10}$; 題 1-13: 將分數 $\frac{4}{5}$ 化成小數, $\frac{4}{5} \rightarrow 0.4$)

R: 為什麼選 $9\frac{7}{10}$?

S: 因為這個九是整數, 所以寫在分數的旁邊, 這個分數就表示十分之七。

R: 十分之七怎麼來的呢?

S: 十分之七就是這個 7(指 9.7), 就是 0.7。

R: 那這一題你選◎0.4, 為什麼?

S: 因為他沒有喝到 $\frac{5}{5}$, 所以就用 0.4 表示。

R: 為什麼沒有喝到 $\frac{5}{5}$, 就要用 0.4 表示?

S: 因為 $\frac{4}{5}$ 不到 1, 0.4 也不到 1 啊!

R: 那為什麼不選 0.8 呢?

S: 嗯……它沒有 4。 $\frac{4}{5}$ 變成小數應該要有 4 才對。

4C511(M, 題 1-12: 將小數 9.7 化成分數, $9.7 \rightarrow 9\frac{7}{10}$; 題 1-13: 將分數 $\frac{4}{5}$ 化成小數, $\frac{4}{5} \rightarrow 0.4$)

R: 為什麼要選第五個答案 0.4 杯?

S: 因為喝了五份裡面的四份, 不到一杯, 所以是 0.4。

R: 那為什麼不選 0.8 呢?

S: 因為 $\frac{4}{5}$ 的上面是 4, 0.4 也有 4。

八十二年版國小數學課程在三年級時由分母為 10 的分數引進一位小數的意義, 透過十等分割, 一位小數的概念由此開始建立。因此,

一位小數與分數的關係對四、五、六年級學生而言不但屬於已學過的內容，也是其了解小數意義的開始。堪慮的是，各年級的答對率均不理想，連六年級也只有五成。學生主要的錯誤竟是將小數符號中的數字直接轉換成分子與分母，由此可見我國學生不易理解小數概念。

至於在分母非 10 的分數化小數的問題中，只有六年級的教材引入除法來解決。對四、五年級而言，該題似乎已超出學習範圍，但學生可利用已學過的知識解題。四、五年級學生可先刪去比 1 大的不合理答案，再將剩餘選項中的小數 0.4、0.8 直接連結分數 $\frac{4}{10}$ 和 $\frac{8}{10}$ ，再與題目中的分數 $\frac{4}{5}$ 做比較，應可找出合適答案，例如 $\frac{4}{10}$ 是十等份中的四份而 $\frac{4}{5}$ 是五等份中的四份，或者 $\frac{4}{10}$ 並未超過一半而 $\frac{4}{5}$ 卻已超過一半。再者，五年級還可用已學過的等值分數概念，利用擴分求解等。然而，從四、五年級頗低的答對率來看，很少有學生能有這樣的表現。學生仍從分數符號表面有的數字來拼湊答案，以為將分子、分母加上小數點寫成小數形式，就是化成小數了。一些對分數數值大小稍有概念的學生雖然能刪去了不合理的答案，最後卻也仍以分數中有的數字來決定答案。綜合學生在這兩題的表現可看出，我國學生對分數意義、小數意義以及兩者關係的了解應屬十分薄弱。

伍、結 論

談到小數，一般人腦海中最先浮現的應該是其符號表徵「a.b」，小數點「.」是小數符號最明顯的辨識條件。本篇論文藉著小數符號，看學生如何解讀小數點左右兩邊的數，來探討學生的小數概念和迷思概念與其成因。

學生若能夠掌握小數符號意義，在面臨圖像表徵或是與分數的雙向連結問題時，便能夠透過等分割的觀點解題。本研究發現，各年級多數的學生並不能確實掌握小數的意義，由內多的圖像表徵及與分數的雙向連結便能窺知一二。在圖像表徵方面，四年級的學生傾向將 a.b 由表面的形式直接轉換成圖像，如將小數點左右兩邊的數(a.b)，視為兩個獨立的整數(a、b)；五、六年級則雖能透過分數的觀點看待

小數，但在單位量的表示(分幾份取幾份)仍是不清楚。在與分數的雙向連結方面，各年級學生因不清楚小數點左右兩邊數字的關係，故易將小數符號由表面形式直接轉換成分數符號(反之亦然)，如將 $a.b$ 化成 $\frac{b}{a}$ (或 $\frac{b}{a}$ 化成 $a.b$)。


由學生對於小數符號的解讀，發現學生很難掌握小數的意義。符號對學生而言，似乎只是一堆離散的知識，學生極不易將符號從小數的概念抽象化出來。小數雖與整數和分數有著密切的關係，但分析學生對小數符號的錯誤想法，卻也是受了整數與分數的影響，如將小數點左右兩邊的數($a.b$)視為兩個獨立的整數(a 、 b)，或將小數點右邊的數雖視為非完整量，卻脫離了與其對應的單位量。追根究底，小數與整數、分數兩者之間的關係，是學生學習小數概念的兩大基石。小數點左右兩邊的數到底有何意義，右邊的部分與左邊的部分又有何關聯，是幫助學生獲得小數概念最重要的部分，在小數的教學中，實不容被忽視。另外，如果我們希望學生對小數概念是真正內化與了解並能應用得當，Wearne 和 Hiebert(1988) 曾提出學生學習小數知識的連結、發展、精緻與熟練、及萃化四個階段論，和 Hiebert(1992)所強調「連結」的論點，或許可以作為小數教學的參考。

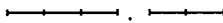
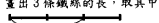
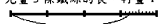
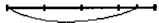

誌 謝


本研究承蒙國家科學委員會補助經費(計畫編號：NSC90-2521-S-153-003)，得以執行，謹致謝忱。






附錄 「小數與小數運算」調查工具


(只含有關小數符號意義的問題)




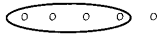
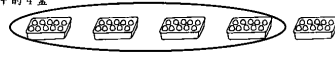
1. () 一條鐵絲有  長，請問 3.2 條鐵絲的長要怎樣表示？


- ① 先畫出 3 條鐵絲的長後，點上小數點，再畫出 2 條鐵絲的長

- ② 畫出 3 條鐵絲的長，取其中的 2 條

- ③ 先畫 3 條鐵絲的長，再畫 1 條鐵絲的長，將它等分成 10 份，取其中的 2 份

- ④ 先畫 3 條鐵絲的長，再畫 1 條鐵絲的長，將它等分成 2 份，取其中的 1 份

- ⑤ 將 1 條鐵絲的長等分成 3 份，取其中的 2 份

- ⑥ 以上都不對，我覺得應該畫成：



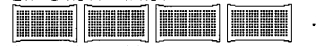



2. ()  表示一個蔥油餅，請問 4.3 個蔥油餅要怎樣表示？


- ① 先畫 4 個蔥油餅，再畫 1 個蔥油餅，將它等分成 3 份，取其中的 1 份

- ② 畫出 4 個蔥油餅，取其中的 3 個

- ③ 先畫 4 個蔥油餅後，點上小數點，再畫 3 個蔥油餅

- ④ 將一個蔥油餅等分成 4 份，取其中的 3 份

- ⑤ 先畫 4 個蔥油餅，再畫 1 個蔥油餅，將它等分成 10 份，取其中的 3 份

- ⑥ 以上都不對，我覺得應該畫成：







3. () 一盒雞蛋  有 10 顆，請問 5.4 盒雞蛋要怎樣表示？


- ① 將一盒雞蛋分成 5 等份，取其中的 4 份

- ② 取 5 盒雞蛋和 4 顆雞蛋

- ③ 取 5 盒雞蛋，點上小數點，再取 4 盒雞蛋

- ④ 5 顆雞蛋，取其中的 4 顆

- ⑤ 5 盒雞蛋，取其中的 4 盒

- ⑥ 以上都不對，我覺得應該畫成：

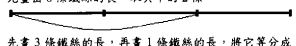
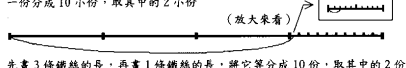
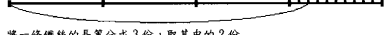
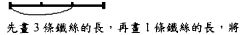
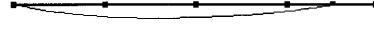

4. () 一包巧克力  有 200 顆，請問 4.02 包也要怎樣表示？


- ① 畫出 4 包巧克力和 4 顆巧克力

- ② 畫出 4 包巧克力，點上小數點，再畫出 2 包巧克力

- ③ 畫出 4 包巧克力和 2 顆巧克力

- ④ 畫出 4 顆巧克力，取其中的 2 顆

- ⑤ 將一包巧克力分成 4 份，取其中的 2 份。

- ⑥ 畫出 4 包巧克力，取其中的 2 包

- ⑦ 以上都不對，我覺得應該畫成：


5. () 一袋糖果  有 20 顆，請問 5.3 袋糖果要怎樣表示？


- ① 5 袋糖果，取其中的 3 袋

- ② 取 5 袋糖果和 3 顆糖果

- ③ 5 顆糖果，取其中的 3 顆

- ④ 取 5 袋糖果和 6 顆糖果

- ⑤ 取 5 袋糖果，點上小數點，再取 3 袋糖果

- ⑥ 將一袋糖果分成 5 份，取其中的 3 份

- ⑦ 以上都不對，我覺得應該畫成：

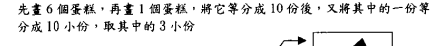
6. () 一條鐵絲有  長，請問 3.02 條鐵絲的長要怎樣表示？


- ① 先畫出 3 條鐵絲的長，取其中的 2 條

- ② 先畫 3 條鐵絲的長，再畫 1 條鐵絲的長，將它等分成 10 份後，又將其中的一份分成 10 小份，取其中的 2 小份

- ③ 先畫 3 條鐵絲的長，再畫 1 條鐵絲的長，將它等分成 10 份，取其中的 2 份

- ④ 將一條鐵絲的長等分成 3 份，取其中的 2 份

- ⑤ 先畫 3 條鐵絲的長，再畫 1 條鐵絲的長，將它等分成 2 份，取其中的 1 份

- ⑥ 先畫出 3 條鐵絲的長，點上小數點，再畫出 2 條鐵絲的長

- ⑦ 以上都不對，我覺得應該畫成：


7. ()  表示一個蛋糕，請問 6.03 個蛋糕要怎樣表示？

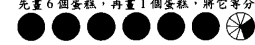
① 將一個蛋糕等分成 6 份，取其中的 3 份


② 畫出 6 個蛋糕，取其中的 3 個



③ 先畫 6 個蛋糕，再畫 1 個蛋糕，將它等分成 10 份後，又將其中的一份等分成 10 小份，取其中的 3 小份



(放大來看)



④ 畫出 6 個蛋糕，點上小數點，再畫出 3 個蛋糕



⑤ 先畫 6 個蛋糕，再畫 1 個蛋糕，將它等分成 10 份，取其中的 3 份



⑥ 以上都不對，我覺得應該畫成：


8. ()  是一杯水，那 7.6 杯的水要怎樣表示？

① 先畫 7 杯水，再畫 1 杯水，將它等分成 10 份，取其中的 6 份



② 7 個杯子，將 6 個杯子裝滿水


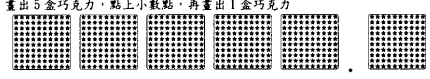
③ 7 個杯子裝滿水，點上小數點，再畫出 6 個裝滿水的杯子


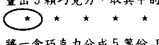
④ 將一杯水分成 7 等份，取其中的 6 份



⑤ 先畫 7 杯水，再畫 1 杯水，將它等分成 6 份，取其中的 1 份


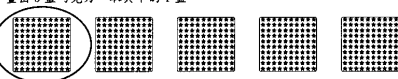
⑥ 以上都不對，我覺得應該畫成：

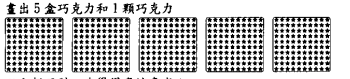
9. () 一盒星星巧克力  有 100 顆，請問 5.01 盒巧克力要怎樣表示

① 畫出 5 盒巧克力，點上小數點，再畫出 1 盒巧克力



② 畫出 5 顆巧克力，取其中的 1 顆



③ 將一盒巧克力分成 5 等份，取其中的一份


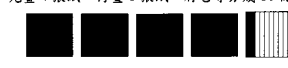
④ 畫出 5 盒巧克力，取其中的 1 盒


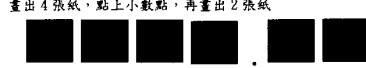
⑤ 畫出 5 盒巧克力和 1 顆巧克力



⑥ 以上都不對，我覺得應該畫成：


10. ()  是一張紙，請問 4.02 張紙要怎樣表示？

① 畫出 4 張紙，取其中的 2 張


② 先畫 4 張紙，再畫 1 張紙，將它等分成 10 份，取其中的 2 份


③ 畫出 4 張紙，點上小數點，再畫出 2 張紙


④ 先畫 4 張紙，再畫 1 張紙，將它等分成 100 份，取其中的 2 份


⑤ 將一張紙等分成 4 份，取其中的 2 份


⑥ 以上都不對，我覺得應該畫成：

12. () 阿和吃了 9.7 個小蛋糕，用分數表示的話，下面哪一個是對的呢？

(① $\frac{97}{1}$ 個 ② $\frac{97}{100}$ 個
 ③ $\frac{7}{9}$ 個 ④ $\frac{9}{7}$ 個
 ⑤ $\frac{1}{7}$ 個 ⑥ $9\frac{7}{10}$ 個)

13. () 太一喝了 $\frac{4}{5}$ 杯牛奶，用小數表示的話，下面哪一個是對的呢？

(① 5.4 杯 ② 4.5 杯 ③ 1.25 杯
 ④ 0.8 杯 ⑤ 0.4 杯)

參考文獻

- 艾如昀(1994)*國小學生處理小數的歷程與困難*。未出版碩士論文，國立中正大學心理研究所，嘉義。
- 吳昭容(1996)*先前知識對國小學童小數概念學習之影響*。未出版碩士論文，國立台灣大學心理學研究所，台北。
- 杜建台(1996)*國小中高年級學童小數概念理解之研究*。國立台中師範學院，台中。
- 周筱亭(1990)*電子計算器對於國民小學小數運算學習之影響(I)*。臺灣省國民學校教師研習會。
- 林原宏(1994)*國小高年級學生解決乘除文字題之研究－以列式策略與試題分析為探討基礎*。未出版碩士論文，國立臺中師範學院，台中。
- 教育部(1993)*國民小學課程標準*。臺北市：台捷。
- 郭孟儒(2002)*國小五年級學童小數迷思概念及其成因之研究*。未出版碩士論文，國立屏東師範學院，屏東。
- 陳文利(2001)*國小四年級學童小數迷思概念之研究*。未出版碩士論文，國立屏東師範學院，屏東。
- 陳永峰(1998)*國小六年級學童小數教學知識之研究*。未出版碩士論文，國立屏東師範學院，屏東。
- 趙文敏(1985)*數學史：算術、代數與數論*。台北市：協進出版社。
- 劉曼麗(1998a)*國小數學教學實踐課程開發研究－小數認識及加減部分*。八十七年度數學教育專題研究計畫成果討論會摘要，國科會科學教育發展處。(NSC 87-2511-S-153-011)。
- 劉曼麗(1998b)*小數教材的處理*。國民小學數學科新課程概說(高年級)~協助兒童認知發展的數學課程，132-152。臺灣省國民學校教師研習會編印。
- 劉曼麗(1999)*小數認識與運算*。*國民小學數學實踐課程總結性評量分析*，129-146，教育部台灣省國民學校教師研習會。
- 劉曼麗(2001)*國小學童的小數知識研究*。*屏東師院學報*，14，823-858。

- 簡茂發、劉湘川(1993)八十一學年度國民教育階段學生基本學習成就評量國小組試題編製及抽測結果報告。國立臺中師範學院，台中。
- 羅啟宏(1992)台灣省鄉鎮發展類型之研究。 *台灣經濟*， **190**， 41-68。
- Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 399-420.
- Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Jr., Lindquist, M. M., & Reys, R. (1981). Decimal: Results and implications from national assessment. *Arithmetic Teacher*, **28**(4), 34-37.
- Chien, C. (1998). *Sixth Grade Students' Knowledge Structure of Decimals in Taiwan*. Unpublished doctor dissertation, University of Georgia.
- Fischbein, E., Deri, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **16**, 3-7.
- Graeber, A. O. & Tirosh, D. (1990). Insights fourth and fifth graders bring to multiplication and division with decimals. *Educational Studies in Mathematics*, **21**, 565-588.
- Greer, B. (1987). *Nonconservation of multiplication and division involving decimals*. *Journal for Research in Mathematics Education*, **18**(1), 37-45.
- Hart, K. M., Kerslake, D., Brown, M. L., Ruddock, G., Kuchemann, D. E., & McCartney, M. I. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London, England: John Murray.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1983). *Students' conceptions of decimal numbers*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal. (ERIC Document Reproduction Service No. Ed 230415).
- Hiebert, J. & Wearne D. (1985). A model of students' decimal computation procedures. *Cognition and Instruction*. **2**(3&4), 175-205.
- Hiebert, J. & Wearne, D. (1986): Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. (pp.199-222). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Hiebert, J. & Wearne, D. (1988). Instruction and Cognitive change in Mathematics. *Educational Psychologist*, **23**(2), 105-117.
- Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, 283-322. Hillsdale, NJ: LEA.
- Kouba, V. L., Brown, C. A., Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Silver, E. A., & Swafford, J. O. (1988). Results of the fourth NAEP assessment of mathematics: Number, operations, word problems. *Arithmetic Teacher*, **35**(8), 14-19.
- Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1991). *Students' understanding or the relationship between fractions and decimals*. Focus on Learning Problems in Mathematics, **13**(1), 3-11.
- Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetics errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, **20**(1), 8-27.
- Wearne D. & Hiebert, J. (1986). *Learning decimal numbers: A study of knowledge acquisition* (ERIC Document Reproduction Service NO. ED267 973).
- Wearne, D., & Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, **19**(5), 371-384.

An Investigation of Elementary School Students' Concepts of Decimals from Problems about Symbols

Man-Li Liu*

Abstract

The study attempts to investigate concepts of elementary school students in learning decimal. The subjects were 2850 students with grades in 4, 5, and 6, selected randomly from six different parts of Taiwan. Data were collected from a written test and an interview. Data analysis was a combination of quantitative and qualitative methods. The main results and findings showed that the students' mistakes and misconceptions with the subject probably were due to their limited understanding of decimals, particularly influenced by whole number and fraction. In general, these students did not gain the strong conceptual knowledge. The research results suggest that teachers should provide students with opportunities to make the connections of decimal concepts to the symbol.

Key words: Elementary School Students, Decimals, Misconceptions

*Man-Li Liu: Associate Professor, Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Pingtung Teachers College.